V. LIDSKI Y OTROS

PROBLEMAS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

EDITORIAL MIR·MOSCU

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В. Б. ЛИДСКИЙ,
Л. В. ОВСЯННИКОВ,
А. Н. ТУЛАЙКОВ,
М. И. ШАБУНИН

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

V. B. LIDSKI,
L. V. OVSIANIKOV,
A. N. TULAIKOV,
M. I. SHABUNIN

PROBLEMAS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

MOSCU | EDITORIAL MIR

CDU 511 + 512 + 513 + 514 (075.4) = 60

Traducido del ruso
Por el ingeniero diplomado
LUIS RODRIGUEZ

на испанском языке

Impreso en la URSS

ESTIMADO LECTOR:

La Editorial le quedará muy agradecida, si Ud. nos manda su opinión acerca del libro que le ofrecemos, así como de la traducción y presentación del mismo.

Le agradeceremos también cualquier otra sugerencia respecto a la edición de libros que le interesan.

Dirija, por favor, su opinión y sugerencias a la Editorial Mir:

Editorial Mir. 1 Rizhski per, 2, Moscú, 129820, I—110, URSS.

PREFACIO

Este libro tiene por objeto ayudar a aquellos que desean profundizar sus conocimientos de matemáticas elementales. En este libro han sido reunidos problemas presentados en los exámenes de admisión a los aspirantes a ingresar en el Instituto Físico-técnico de Moscú. La resolucion de los problemas expuestos en este libro requiere conocimientos a nivel de la escuela secundaria (el escaso material que a veces no se incluye en el programa de las escuelas secundarias, aquí se expone especialmente). No obstante, es preciso señalar que la mayoría de los problemas presentados son problemas de elevada dificultad.

El presente libro consta de tres partes: "Algebra", "Geometría" y "Trigonometría", cada una de las cuales está dividida en subsecciones. En cada subsección los problemas están dispuestos en un orden determinado en el cual la dificultad de éstos va creciendo.

INDICE

Trigonometría

PROBLEMAS | ALGEBRA

1. Progresiones aritmética y geométrica

Observaciones preliminares

Si a_n es el término enèsimo, d—la diferencia y S_n—la suma de los n primeros términos de una *progresion aritmética*, entonces

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}. \tag{2}$$

Si u_n es el término enésimo, q—el denominador y S_n—la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, entonces

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \tag{3}$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} \tag{4}$$

Si, por fin, S es la suma de una progresión geométrica decreciente infinita $(|q| < 1)$, entonces

$$S = \frac{u_1}{1-q} \tag{5}$$

1. Demostrar que si los números positivos a, b, c forman una progresión aritmética, los números

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

también forman una progresión aritmética.

2. Los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una progresión aritmética. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3. Demostrar que si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son iguales a cero y forman una progresión aritmética, entonces

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

4. Demostrar que toda sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que para cualquier $n \geqslant 3$ satisfacen la condición

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

forma una progresión aritmética.

5. Mostrar que para toda progresión aritmética $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ tienen lugar las igualdades

$$a_1-2a_2+a_3=0,$$
$$a_1-3a_2+3a_3-a_4=0,$$
$$a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0,$$

y que, en general, para cualquier $n>2$ tenemos:

$$a_1-\binom{n}{1}a_2+\binom{n}{2}a_3-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}=0.$$

Indicación. En éste y en el siguiente problema es conveniente hacer uso de la identidad fácil de comprobar

$$C_k(n)=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

6. Demostrar que para cualquier progresión aritmética $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ siendo $n \geqslant 3$ tiene lugar la igualdad

$$a_1^2-\binom{n}{1}a_2^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}^2=0.$$

7. Demostrar que si los números ${}^k\log x$, ${}^m\log x$, ${}^n\log x\ (x\neq 1)$ forman una progresión aritmética, entonces

$$n^2=(kn)^{{}^k\log m}.$$

8. Hallar una progresión aritmética en la que la relación entre la suma de los n primeros términos y la suma de los kn siguientes no depende de n.

9. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman una progresión aritmética. Hallar esta progresión, si

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=b^2.$$

Indicacion. En éste y en el siguiente problema es conveniente hacer uso de la igualdad

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10. La sucesión de números 1, 4, 10, 19, ... posee la propiedad de que la diferencia de dos números vecinos forman una progresión aritmética. Hallar el término enésimo y la suma de los n primeros términos de esta sucesión de números.

11. Hagamos una tabla

$$\begin{array}{l} 1, \\ 2,\ 3,\ 4 \\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Demostrar que la suma de los términos de cada columna horizontal es igual al cuadrado de un número impar.

12. En la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \dots$ se conocen los términos $a_{m+n} = A$, $a_{m-n} = B$. Hallar a_m y a_n $(A \neq 0)$.

13. Supongamos que S_n es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, $S_n \neq 0$, $q \neq 0$. Demostrar que

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}$$

14. Conociendo la suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica y la suma de las recíprocas de estos términos, hallar el producto P_n de los n primeros términos de la progresión.

15. Hallar la suma

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n.$$

16. Hallar la suma

$$1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots1,$$

si el último sumando es un número de n cifras.

17. Hallar la suma

$$nx + (n-1)x^2 + \dots + 2\cdot x^{n-1} + 1\cdot x^n.$$

18. Hallar la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

19. Demostrar que los números 49, 4489, 444889, ..., obtenidos colocando el número 48 en medio del número anterior, son los cuadrados de números enteros.

20. Demostrar que se puede hallar una progresión geométrica decreciente

$$1,\ q,\ q^2,\ \dots,\ q^n,\ \dots,$$

cada término de la cual difiere de la suma de todos los términos que le siguen en el factor constante k previsto. ¿Para qué valores de k es posible el problema?

21. Una sucesión infinita de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ $\ldots (x_1 \neq 0)$ para cualquier $n \geqslant 3$ satisface la condición

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)^2.$$

Demostrar que $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ son términos sucesivos de una progresión geométrica.

Indicación. Se puede aplicar el método de inducción completa.

22. Se conocen una progresión aritmética con el término común a_n y una progresión geométrica con el término común b_n, con la particularidad de que para todos los números naturales de n, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_3$ y $a_n > 0$. Demostrar que para $n > 2$, $a_n < b_n$.

23. Demostrar que si para una progresión geométrica $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ y una progresión aritmética $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ se cumplen las desigualdades

$$a_1 > 0, \quad \frac{a_2}{a_1} > 0, \quad b_2 - b_1 > 0,$$

existe tal número α, que el ${}^{\alpha}\log a_n - b_n$ no depende de n.

2. Ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones

Observaciones preliminares

Al resolver los sistemas de ecuaciones propuestos más abajo, el sistema inicial se reduce, mediante ciertas simplificaciones, a un sistema equivalente, todas las resoluciones del cual o son conocidas, o pueden ser halladas por los procedimientos conocidos. En ciertos casos es necesario pasar a sistemas que se satisfacen de antemano con todas las resoluciones del sistema inicial, sin embargo, hablando en general, no solamente con éstas. En estos casos, los conjuntos de valores determinados de las incógnitas deben comprobarse con ayuda de la sustitución en el sistema inicial.

En problemas aislados se usan las *fórmulas de Viete* que enlazan los coeficientes de la ecuación de tercer grado

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

con sus raíces x_1, x_2, x_3. Estas fórmulas tienen el aspecto:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, \quad x_1x_2x_3 = -r. \tag{2}$$

Las fórmulas (2) se hallan igualando los coeficientes de las x de iguales potencias en la identidad

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

24. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

25. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=4,\\ x+xy+y&=2. \end{aligned}\right\}$$

26. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=5a^3,\\ x^2y+xy^2&=a^3, \end{aligned}\right\}$$

con la condición de que a es real y no es igual a 0.

27. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=12,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

28. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=91,\\ x^2-xy+y^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

29. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^3-y^3&=19(x-y),\\ x^3+y^3&=7(x+y). \end{aligned}\right\}$$

30. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y)&=5xy,\\ 8(x^3+y^3)&=65. \end{aligned}\right\}$$

31. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-y^2)&=9,\\ (x-y)(x^2+y^2)&=5. \end{aligned}\right\}$$

32. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1,\\ x^4+y^4&=7. \end{aligned}\right\}$$

33. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1,\\ x^5+y^5&=31. \end{aligned}\right\}$$

34. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^4+y^4-x^2y^2&=13,\\ x^2-y^2+2xy&=1, \end{aligned}\right\}$$

que satisfacen la condición

$$xy \geqslant 0.$$

35. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1)&=10,\\(x+y)(xy-1)&=3.\end{aligned}\right\}$$

Indicación. Supóngase que $xy=v$, $x+y=u$.

36. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2)\frac{x}{y}&=6,\\(x^2-y^2)\frac{y}{x}&=1.\end{aligned}\right\}$$

37. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=axy,\\x^4+y^4&=bx^2y^2.\end{aligned}\right\}$$

38. Resolver la ecuación (descomponiendo el primer miembro en factores)

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0.$$

39. Resolver la ecuación

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

40. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{xy}+\frac{xy}{x+y}&=a+\frac{1}{a},\\\frac{x-y}{xy}+\frac{xy}{x-y}&=b+\frac{1}{b}.\end{aligned}\right\}$$

41. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$(x-4,5)^4+(x-5,5)^4=1.$$

42. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}|x-1|+|y-5|&=1,\\y&=5+|x-1|\ ^{*)}.\end{aligned}\right\}$$

---

*) Se llama magnitud absoluta del número x (se designa con $|x|$) a un número no negativo que se determina de las condiciones siguientes:

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{si } x<0;\\ x, & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

43. Aclarar para que valores reales de x e y se cumple la igualdad

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

44. Hallar todos los valores reales de x e y que satisfacen la ecuación

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0.$$

45. Hallar las soluciones reales del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{array}\right\}$$

46. Determinar para que valor de a el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{array}\right\}$$

tiene la única solución real y hallar esta solución.

47. Demostrar que para cualquier (en general compleja) solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy+\dfrac{1}{xy}=a, \\ x^4+y^4+x^2y^2-\dfrac{1}{x^2y^2}-2=b^2 \end{array}\right\}$$

la suma x^2+y^2 es real para cualesquiera valores reales de a y b si $a\neq 0$.

48. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=a+b+c, \\ bx+cy+az=a+b+c, \\ cx+ay+bz=a+b+c, \end{array}\right\}$$

suponiendo que a, b y c son reales y que $a+b+c\neq 0$.

49. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{array}\right\}$$

50. ¿Qué condición deben satisfacer los números a_1, a_2 y a_3 para que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} (1+a_1)x+y+z=1, \\ x+(1+a_2)y+z=1, \\ x+y+(1+a_3)z=1 \end{array}\right\}$$

tenga solución y además única?

51 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=p,\\ -bx+ay+dz-ct&=q,\\ -cx-dy+az+bt&=r,\\ -dx+cy-bz+at&=s, \end{aligned}\right\}$$

donde a, b, c y d satisfacen la condición:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0.$$

52. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n&=a_1,\\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)\,x_n&=a_2,\\ (n-1)\,x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)\,x_n&=a_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+1x_n&=a_n. \end{aligned}\right\}$$

53. Demostrar que si

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0,\\ x_2+x_3+x_4&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_{99}+x_{100}+x_1&=0,\\ x_{100}+x_1+x_2&=0, \end{aligned}\right\}$$

entonces

$$x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}=0.$$

54. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz-x&=2,\\ y^2+xy+yz-y&=4,\\ z^2+xz+yz-z&=6. \end{aligned}\right\}$$

55. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=7,\\ x^2+y^2-z^2&=37,\\ x^3+y^3-z^3&=1. \end{aligned}\right\}$$

56. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{xyz}{x+y}&=2,\\ \frac{xyz}{y+z}&=\frac{6}{5},\\ \frac{xyz}{z+x}&=\frac{3}{2}.\end{aligned}\right\}$$

57. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}u^2+v^2+w&=2,\\ v^2+w^2+u&=2,\\ w^2+u^2+v&=2.\end{aligned}\right\}$$

58. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x^2+xy+y^2&=1,\\ x^2+xz+z^2&=4,\\ y^2+yz+z^2&=7\end{aligned}\right\}$$

59. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{x_1}&=a_1,\\ \frac{x_1x_3\ldots x_n}{x_2}&=a_2,\\ &\ldots\ldots\\ \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_n}&=a_n,\end{aligned}\right\}$$

suponiendo que los números $a_1, \ldots, a_n$ y $x_1, \ldots, x_n$ son positivos.

60. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}(x+y+z)(ax+y+z)&=k^2,\\ (x+y+z)(x+ay+z)&=l^2,\\ (x+y+z)(x+y+az)&=m^2,\end{aligned}\right\}$$

suponiendo que a, k, l y m son números reales y que $k^2+l^2+m^2>0$.

61. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=6,\\ x^2+y^2+z^2&=14,\\ xz+yz&=(xy+1)^2.\end{aligned}\right\}$$

62. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz+yz&=a,\\ y^2+xy+xz+yz&=b,\\ z^2+xy+xz+yz&=c,\end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $abc\neq 0$.

63. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x(y+z)&=a^2,\\ y(z+x)&=b^2,\\ z(x+y)&=c^2,\end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $abc\neq 0$.

64. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y^3+z^3&=2a(yz+zx+xy),\\ z^3+x^3&=2b(yz+zx+xy),\\ x^3+y^3&=2c(yz+zx+xy).\end{aligned}\right\}$$

65. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y+2x+z&=a(x+y)(z+x),\\ z+2y+x&=b(y+z)(x+y),\\ x+2z+y&=c(z+x)(y+z).\end{aligned}\right\}$$

66. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=9,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=1,\\ xy+xz+yz&=27.\end{aligned}\right\}$$

67. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ xy+yz+xz&=a^2,\\ xyz&=a^3.\end{aligned}\right\}$$

68. Demostrar que la solución única del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0,\\ yz+zx+xy-y^2&=0,\\ xy+z^2&=0,\end{aligned}\right\}$$

es la solución $x=y=z=0$.

69. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=a^2,\\ x^3+y^3+z^3&=a^3. \end{aligned}\right\}$$

70. Sean (x, y, z) las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=b^2,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{c}. \end{aligned}\right\}$$

Hallar la suma

$$x^3+y^3+z^3.$$

71. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)&=1,\\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)&=-6. \end{aligned}\right\}$$

72. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-z)^2&=a,\\ y^2+(x-z)^2&=b,\\ z^2+(x-y)^2&=c. \end{aligned}\right\}$$

73. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} xy+yz+zx&=47,\\ x^2+y^2&=z^2,\\ (z-x)(z-y)&=2. \end{aligned}\right\}$$

74. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{2z^2}{1+z^2},\\ y&=\frac{2x^2}{1+x^2},\\ z&=\frac{2y^2}{1+y^2}. \end{aligned}\right\}$$

75. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 2x_n &= x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 &= x_n + \frac{2}{x_n}. \end{aligned}\right\}$$

76. Demostrar que si a, b, c y d son por pares números reales desiguales y x, y y z son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 1 + x + y + z &= 0, \\ a + bx + cy + dz &= 0, \\ a^2 + b^2x + c^2y + d^2z &= 0, \end{aligned}\right\}$$

entonces la multiplicación xyz es positiva.

En las ecuaciones propuestas a continuación, en el caso de raíces cuyas potencias sean pares, se examinan sólo aquellos valores de las incógnitas para los cuales la expresión contenida bajo la raíz no es negativa; tomando, al mismo tiempo, solamente los valores no negativos de la raíz. En el caso de raíces impares, la expresión contenida bajo la raíz puede ser cualquier número real (en este caso el signo de la raíz coincide con el signo de la expresión subradical).

77. Resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$$

78. Resolver la ecuación

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}.$$

79. Resolver la ecuación

$$\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}} + \sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}} = 7\sqrt{2}.$$

80. Resolver la ecuación

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

81. Resolver la ecuación

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}.$$

82. Hallar todas las raíces reales de la ecuación

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

83. Resolver la ecuación

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$$

¿Para cuáles valores reales de a tendrá solución la ecuación?

84. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2}=2(x+y),\\ x^2+y^2+4xy=\frac{1}{5}.\end{aligned}\right\}$$

85. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right),\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.\end{aligned}\right\}$$

86. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},\\ x+yx+y=9.\end{aligned}\right\}$$

87. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=3,\\ x+xy+y=7.\end{aligned}\right\}$$

88. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y},\\ xy=15.\end{aligned}\right\}$$

89. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}y+\frac{2\sqrt{x^2-12y+1}}{3}=\frac{x^2+17}{12},\\ \frac{x}{8y}+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}-\frac{y}{2x}.\end{aligned}\right\}$$

90. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4},\\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.\end{aligned}\right\}$$

91. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{aligned}\right\}$$

92. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y+\frac{4}{3}\sqrt{x^2-6y+1}=\frac{x^2+17}{6}, \\ \frac{x^2y-5}{49}=\frac{2}{y}-\frac{12}{x^2}+\frac{4}{9}. \end{aligned}\right\}$$

93. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (x-y)\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}}{2}, \\ (x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y}. \end{aligned}\right\}$$

94. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a, \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2 \end{aligned}\right\} \quad (a>0).$$

95. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y}), \\ x^2+xy+y^2=b^2 \end{aligned}\right\} \quad (a>0,\ b>0).$$

3. Desigualdades algebraicas

Observaciones preliminares

Expongamos algunas desigualdades utilizadas en la resolución de los problemas que se proponen más abajo.

Para cualesquiera a y b reales

$$a^2+b^2\geqslant 2|ab| \qquad (1)$$

La desigualdad (1) es una deducción de la evidente desigualdad $(a\pm b)^2\geqslant 0$. El signo de igualdad en (1) tiene lugar sólo en el caso en que $|a|=|b|$.

Si $ab>0$, dividiendo las dos partes de la desigualdad (1) por ab se tendrá:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2. \qquad (2)$$

Si $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, entonces, haciendo en (1) $u=a^2$, $v=b^2$, obtendremos:

$$\frac{u+v}{2}\geqslant\sqrt{uv} \qquad (3)$$

En las desigualdades (2) y (3) el signo de igualdad tiene lugar solamente cuando $a=b$ y $u=v$ correspondientemente.

Señalemos, además, ciertas *propiedades del trinomio cuadrado*

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{4}$$

que en adelante se emplean en toda una serie de problemas.

De la representacion del trinomio (4) por la fórmula

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{5}$$

se deduce que en el caso cuando la discriminante del trinomio

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

(en este caso las raíces del trinomio no son reales), el trinomio adquiere para todos los valores de x valores de un mismo signo, que coincide con el signo del coeficiente a del término de mayor potencia.

En el casa en que $D = 0$ el trinomio conserva también el signo constante, haciéndose igual a cero para el valor único $x = -\frac{b}{2a}$.

Por fin, cuando $D > 0$ (en este caso, las raíces x_1 y x_2 del trinomio son reales y diferentes), de la descomposición

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

se deduce que solamente con la condición de que

$$x_1 < x < x_2$$

el trinomio adquiere valores de signo contrario al de a.

Para todos los demás valores de x diferentes de x_1 y x_2, el trinomio posee el mismo signo que a.

Así pues, el trinomio siempre conserva el signo del coeficiente del término de mayor potencia, excepto en el caso en que sus raíces son reales y

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

96. Hallar todos los valores reales de r para los cuales el polinomio

$$(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 1$$

es positivo para todos los valores reales de x.

97. Demostrar que la expresión

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$$

no es negativa para cualesquiera x e y reales y no iguales a cero.

98. ¿Para cúales valores de a se satisface el sistema de desigualdades

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

cualesquiera que sean los valores de x?

99. Demostrar que para cualesquiera valores reales de los números a, b, c y d es válida la desigualdad

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

100. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema mixto

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+2x\leqslant 1, \\ x-y+a=0 \end{array}\right\}$$

tiene solución única. Hallar las soluciones correspondientes.

101. Hallar los pares de los números enteros x e y que satisfacen al sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{r} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \\ y+|x-1|<2. \end{array}\right\}$$

102. Demostrar que para cualquier valor entero de $n>1$ es válida la desigualdad

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

103. Demostrar que para cualquier valor entero y positivo de m es válida la desigualdad

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+(2m+1)}>1.$$

104. Demostrar que para cualquier valor entero positivo de n

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

105. Demostrar que siendo $n>2$

$$(n!)^2>n^n.$$

106. Demostrar que con tres segmentos de longitud $a>0$, $b>$ y $c>0$ se puede construir un triángulo solamente cuando

$$pa^2+qb^2>pqc^2$$

para cualesquiera números p y q enlazados en la proporción

$$p+q=1.$$

107. Demostrar que para cualesquiera valores reales de x, y y z es válida la desigualdad

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2\geqslant 0.$$

108. Demostrar que para cualesquiera valores reales de x e y es válida la desigualdad

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\geqslant 1.$$

109. Demostrar que con la condición de que sea $2x+4y=1$ se cumple la desigualdad

$$x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{20}.$$

110. ¿Cúales condiciones deberá satisfacer el número $d>0$ para que siendo $R \geqslant r > 0$ sea válida la desigualdad

$$0 < \frac{d^2+R^2-r^2}{2dR} \leqslant 1?$$

111. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

(a, b, c son números positivos)

112. Demostrar que si a, b y c son números de igual signo y $a<b<c$, entonces

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)<0.$$

113. Demostrar que siendo a_1, a_2, a_3, ..., a_n números positivos y $a_1a_2a_3\ldots a_n=1$, entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

114. Demostrar que si $a+b=1$, entonces

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}.$$

115. Demostrar que el polinomio

$$x^8-x^5+x^2-x+1$$

es positivo para todos los valores reales de x.

116. Demostrar que si $|x|<1$, para cualquier valor entero de $n \geqslant 2$ se cumple la desigualdad

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

117. Demostrar que

$$|x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{4}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2),$$

donde x_1, x_2, ..., x_n, a_1, a_2, ..., a_n y ε son números reales arbitrarios y además $\varepsilon>0$.

118. ¿Para cúales valores reales de x se cumple la desigualdad

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3?$$

119. Demostrar que para todos los valores positivos de x e y y los valores enteros y positivos de m y n $(n \geqslant m)$ se cumple la desigualdad

$$\sqrt[m]{x^m+y^m} \geqslant \sqrt[n]{x^n+y^n}.$$

120. Demostrar la desigualdad

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}, \quad a>0.$$

121. Demostrar la desigualdad

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$$

con la condición de que el numerador de la parte izquierda de la desigualdad contiene n signos radicales y el denominador contiene $n-1$ signo radical.

122. Demostrar que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, que satisfagan las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1, \\ b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1, \end{array}\right\}$$

es válida la desigualdad

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leqslant 1.$$

123. Demostrar que si los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son positivos y satisfacen la relación

$$x_1x_2\ldots x_n=1,$$

entonces

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant n.$$

4. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales, identidades y desigualdades

Observaciones preliminares

De acuerdo con la definición del logaritmo del número N con base a tendremos:

$$a^{^a\log N} = N. \tag{1}$$

En esta fórmula, N es cualquier número positivo y a una base arbitraria, al mismo tiempo $a>0$, $a \neq 1$.

A continuación, al resolver toda una serie de problemas, para pasar de los logaritmos con base a a los logaritmos con base b y viceversa, se usa la fórmula siguiente

$$^{a}\log N=\frac{^{b}\log N}{^{b}\log a} \tag{2}$$

(esta fórmula se demuestra por logaritmación de la identidad (1) tomando como base b). De la fórmula (1), siendo $N=b$, en particular, se deduce:

$$^{a}\log b=\frac{1}{^{b}\log a}\,. \tag{3}$$

124. Resolver la ecuación

$$\frac{^{2}\log x}{^{2}\log^{2} a}-\frac{2^{a}\log x}{\frac{1}{^{b}\log a}}={}^{\sqrt[3]{a}}\log x\cdot{}^{a}\log x.$$

125. Resolver la ecuación

$$^{x}\log 2\cdot{}^{\frac{x}{16}}\log 2={}^{\frac{x}{64}}\log 2.$$

126. Resolver la ecuación

$$^{2}\log(9^{x-1}+7)=2+{}^{2}\log(3^{x-1}+1).$$

127. Resolver la ecuación

$$^{3x}\log\left(\frac{3}{x}\right)+{}^{3}\log^{2}x=1.$$

128. Demostrar que la ecuación

$$^{2x}\log\left(\frac{2}{x}\right){}^{2}\log^{2}x+{}^{2}\log^{4}x=1$$

tiene una sola raíz que satisface a la desigualdad $x>1$. Hallar esta raíz.

129. Resolver la ecuación

$$\frac{^{a^{2}\sqrt{x}}\log a}{^{2x}\log a}+{}^{ax}\log a\cdot{}^{\frac{1}{a}}\log 2x=0.$$

130. ¿A cúales condiciones deberán satisfacer los números a y b para que la ecuación

$$1+{}^{b}\log(2\log a-x)^{x}\log b=\frac{2}{^{b}\log x}$$

tenga por lo menos una solución? Hallar todas las soluciones de esta ecuación.

131. Resolver la ecuación*)

$$\sqrt{{}^{a}\log \sqrt[4]{ax}+{}^{x}\log \sqrt[4]{ax}}+\sqrt{{}^{a}\log \sqrt[4]{\frac{x}{a}}+{}^{x}\log \sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a.$$

132. Resolver la ecuación

$$\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}}=3.$$

133. Resolver la ecuación

$$1+\frac{{}^{a}\log(p-x)}{{}^{a}\log(x+q)}=\frac{2-{}^{p-q}\log 4}{{}^{p-q}\log(x+q)} \qquad (p>q>0).$$

134. Resolver la ecuación

$${}^{\sqrt{5}}\log x \sqrt{{}^{x}\log 5\sqrt{5}+{}^{\sqrt{5}}\log 5\sqrt{5}}=-\sqrt{6}.$$

135. Resolver la ecuación

$$(0,4)^{\log^2 x+1}=(6,25)^{2-\log x^3}.$$

136. Resolver la ecuación

$$1+{}^{x}\log\frac{4-x}{10}=(\log\log n-1)\,{}^{x}\log 10.$$

¿Cuántas raíces tiene esta ecuación para un valor determinado de n?

137. Resolver la ecuación

$${}^{\operatorname{sen} x}\log 2 \cdot {}^{\operatorname{sen}^2 x}\log a+1=0.$$

138. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}\log(x+y)-{}^{3}\log(x-y)&=1,\\ x^2-y^2&=2.\end{aligned}\right\}$$

139. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^a&=y^b,\\ {}^{c}\log\frac{x}{y}&=\frac{{}^{c}\log x}{{}^{c}\log y}\end{aligned}\right\}$$

$$(a\neq b, \quad ab\neq 0.$$

140 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} {}^{5}\log x+3^{{}^{3}\log y}&=7,\\ x^y&=5^{12}.\end{aligned}\right\}$$

---

*) Aquí y a continuación las raíces se comprenden en el sentido mencionado en la pág. 20.

141. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} yx^{{}^{y}\log x} &= x^{\frac{5}{2}}, \\ {}^{4}\log y\cdot{}^{y}\log(y-3x) &= 1. \end{aligned}\right\}$$

142. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a^{x}b^{y} &= ab, \\ 2\,{}^{a}\log x &= {}^{\frac{1}{b}}\log y\cdot{}^{\sqrt{a}}\log b. \end{aligned}\right\}$$

143. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3\left(2\,{}^{y^2}\log x-{}^{\frac{1}{x}}\log y\right) &= 10, \\ xy &= 81. \end{aligned}\right\}$$

144. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} {}^{12}\log x\left(\frac{1}{{}^{x}\log 2}+{}^{2}\log y\right) &= {}^{2}\log x, \\ {}^{2}\log x\cdot{}^{3}\log(x+y) &= 3\,{}^{3}\log x. \end{aligned}\right\}$$

145. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^{\,{}^{2}\log y^{\frac{1}{x}}\log 2} &= y\sqrt{y}\,(1-{}^{x}\log 2), \\ {}^{y^2}\log 2^{\sqrt{2}\,\log x} &= 1. \end{aligned}\right\}$$

146. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}\log x+{}^{4}\log y+{}^{4}\log z &= 2, \\ {}^{3}\log y+{}^{9}\log z+{}^{9}\log x &= 2, \\ {}^{4}\log z+{}^{16}\log x+{}^{16}\log y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

147. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} {}^{0,5}\log(y-x)+{}^{2}\log\frac{1}{y} &= -2, \\ x^2+y^2 &= 25. \end{aligned}\right\}$$

148. Resolver la ecuación

$$4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

149. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{x-y}, \\ x^2 y &= 1, \end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $x > 0$ y $y > 0$.

150. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a^{2x} + a^{2y} &= 2b, \\ a^{x+y} &= c \end{aligned}\right\} \qquad (a > 0).$$

¿A cúales condiciones deberán satisfacer b y c para que el sistema tenga solución?

151. Hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{n}, \\ y^{x+y} &= x^{2n} y^{n}, \end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $x > 0$, $y > 0$ y $n > 0$.

152. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (3x+y)^{x-y} &= 9, \\ \sqrt[x-y]{324} &= 18x^2 + 12xy + 2y^2. \end{aligned}\right\}$$

153. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^{y} &= y^{x}, \\ x^{p} &= y^{q}, \end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $x > 0$, $y > 0$ y $pq > 0$.

154. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^{y} &= y^{x}, \\ p^{x} &= q^{y}, \end{aligned}\right\}$$

suponiendo que $x > 0$, $y > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

155. Demostrar que

$$^{c+b}\log a + {}^{c-b}\log a = 2\,{}^{c+b}\log a\, {}^{c-b}\log a,$$

si $a^2 + b^2 = c^2$ y $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

156. Simplificar la expresión

$$({}^{b}\log a - {}^{a}\log b)^2 + \left({}^{b^{\frac{1}{2}}}\log a - {}^{a^2}\log b\right)^2 + \ldots + \left({}^{b^{\frac{1}{2^n}}}\log a - {}^{a^{2^n}}\log b\right)^2.$$

157. Simplificar la expresión $a^{\frac{\log \log a}{\log a}}$, admitiendo que todos los logaritmos han sido tomados con la misma base b.

158. Se conoce: ${}^{a}\log b = A$, ${}^{q}\log b = B$ y un número entero $n > 0$. Calcular el ${}^{c}\log b$, donde c es igual al producto de n términos de una progresión geométrica con el primer término a y el denominador q.

159. Demostrar que si para cierto valor positivo de $N \neq 1$, para los tres números positivos a, b y c se cumple la relación

$$\frac{{}^{a}\log N}{{}^{c}\log N} = \frac{{}^{a}\log N - {}^{b}\log N}{{}^{b}\log N - {}^{c}\log N},$$

entonces, b es el valor medio proporcional entre a y c y la relación se cumple para cualesquiera valores positivos de $N \neq 1$.

160. Demostrar la identidad

$${}^{a}\log N\, {}^{b}\log N + {}^{b}\log N\, {}^{c}\log N + {}^{c}\log N\, {}^{a}\log N = \frac{{}^{a}\log N\, {}^{b}\log N\, {}^{c}\log N}{{}^{abc}\log N}.$$

161. Demostrar la identidad

$$\frac{{}^{a}\log x}{{}^{ab}\log x} = 1 + {}^{a}\log b.$$

162. Resolver la desigualdad

$${}^{\frac{1}{2}}\log x + {}^{3}\log x > 1.$$

163. Resolver la desigualdad

$$x^{{}^{a}\log x + 1} > a^2 x \qquad (a > 1).$$

164. Resolver la desigualdad

$${}^{a}\log x + {}^{a}\log (x+1) < {}^{a}\log (2x+6) \qquad (a > 1).$$

165. Resolver la desigualdad

$${}^{8}\log (x^2 - 5x + 6) < 0.$$

166. Resolver la desigualdad

$$\frac{1}{{}^{2}\log x} - \frac{1}{{}^{2}\log x - 1} < 1.$$

167. Resolver la desigualdad

$$x^{2 - {}^{2}\log^2 x - {}^{2}\log x^2} - \frac{1}{x} > 0.$$

168. ¿Para cuáles valores reales de x y α se cumple la desigualdad

$${}^{2}\log x + {}^{x}\log 2 + 2\cos \alpha \leqslant 0?$$

169. Resolver la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2-5)] > 0.$$

5. Combinatoria y binomio de Newton

Observaciones preliminares

El número de *variaciones* de orden m con n elementos se determina haciendo uso de la fórmula

$$V_m(n) = n(n-1)\ldots(n-m+1). \qquad (1)$$

El número de *permutaciones* con n elementos se determina por la fórmula

$$P(n) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n = n! \qquad (2)$$

Para las *combinaciones* de orden m de n elementos es válida la fórmula

$$C_m(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} = \frac{V_m(n)}{P(m)}. \qquad (3)$$

Se cumple la igualdad

$$C_m(n) = C_{n-m}(n).$$

Para los valores enteros y positivos de n y cualesquiera x y a es válido el desarrollo

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2} a^{n-2}x^2 + \binom{n}{n-1} a^{n-1}x + a^n; \qquad (4)$$

el término común de este desarrollo es igual a

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}. \qquad (5)$$

Del desarrollo (4) se deducen las igualdades

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n,$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n = 0.$$

170. Hallar m y n si se conoce que

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5:5:3.$$

171. Hallar el coeficiente de x^8 en el desarrollo

$$(1+x^2-x^3)^9.$$

172. Hallar el coeficiente de x^m en el desarrollo según las potencias de x de la expresión

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \ldots + (1+x)^n.$$

Examinar los casos cuando $m < k$, $m \geqslant k$.

173. En el desarrollo $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, el coeficiente binominal del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades. Hallar el término que no contiene x.

174. Hallar en el desarrollo

$$\left(1+x+\frac{6}{x}\right)^{10},$$

el sumando que no contiene x.

175. ¿Para cuál valor de k el término T_{k+1} del desarrollo por la fórmula del binomio de Newton

$$(1+\sqrt{3})^{100}$$

será al mismo tiempo mayor que los términos precedente y consecuente de este desarrollo?

176. Hallar la condición para la cual el desarrollo $(1+a)^n$ (n es un número entero y positivo) según las potencias de $a \neq 0$ contiene dos sumandos consecutivos iguales. ¿Puede contener el desarrollo tres sumandos consecutivos iguales?

177. Hallar el número de términos diferentes, no semejantes entre sí, del desarrallo

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^3,$$

obtenidos después de la potenciación.

178. Supongamos que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son números simples diferentes. ¿Cuántos divisores posee el número $q=p_1p_2\ldots p_n$, incluyendo 1 y q?

179. Demostrar que si en el desarrollo de $x(1+x)^n$ cada coeficiente se divide por el exponente de la x a la cual pertenece este coeficiente, entonces la suma de los cocientes obtenidos será igual a

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

180. Demostrar que para un valor entero de $n>0$

$$\binom{n}{1}x(1-x)^{n-1}+2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\ldots+n\binom{n}{n}x^n=nx.$$

181. Hallar el número de métodos en que puede ser dividida una baraja de 36 cartas por la mitad de manera tal, que en cada una de las mitades entren dos ases.

182. ¿Cuántos números telefónicos se pueden formar de cinco cifras de manera tal, que en cada número tomado por separado todas las cifras sean diferentes?

183. Se dan $2n$ elementos. Se examinan todas las agrupaciones posibles de estos elementos en pares, considerando al mismo tiempo que las agrupaciones que difieren sólo por el orden de los elementos en los pares y por el orden de la disposición de los pares coinciden. ¿Cuántas agrupaciones diferentes existen?

184. Hallar el número de permutaciones con n elementos, en las cuales dos elementos a y b no son inmediatos.

185. En una lotería se sortean 8 objetos. El primero que se acerca a la urna saca 5 billetes. Hallar el número de métodos en que puede sacarlos, de modo que: 1) dos de ellos sean premiados; 2) por lo menos dos de ellos sean premiados. En la urna hay 50 billetes.

186. En una de dos rectas paralelas se han elegido m puntos, en la otra, n puntos. Cada uno de los m puntos de la primera recta está unido por medio de una línea recta con cada uno de los n puntos de la segunda recta. Hallar cuantas veces se cruzan todos los segmentos que unen los puntos si se sabe que en ningún punto se cruzan más de dos segmentos al mismo tiempo.

187. n rectas paralelas de un plano se cruzan por una serie de m rectas paralelas. ¿Cuántos paralelogramos pueden ser saparados en la red obtenida?

188. Cierto alfabeto se compone de seis letras que con el fin de transmitirlas por telégrafo se codificaron de la siguiente manera:

·; —; ··; ——; ·—; —·.

Al transmitir una palabra no se hicieron los intervalos que separan una letra de la otra, de modo que resultó una cadena continua de puntos y rayas con 12 signos. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra transmitida?

6. Planteamiento de ecuaciones

189. Al multiplicar dos números, uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, el escolar cometió un error disminuyendo en 4 la cifra de las decenas en el producto. Al dividir (para comprobar el resultado) el producto obtenido por el menor de los factores obtuvo en el cociente 39 y en el resto 22. Hallar los factores.

190. Dos ciclistas partieron al mismo tiempo del punto A hacia el punto B con velocidades diferentes pero constantes. Al alcanzar el punto B volvieron inmediatamente hacia atrás. El primer ciclista dejó atrás al segundo y lo encontró en el camino de regreso a la distancia de a km del punto B. Luego, después de alcanzar el punto A y de volver hacia el punto B, encuentra al segundo ciclista después de recorrer una k-ésima parte de la distancia de A a B. Hallar la distancia entre A y B.

191. Dos automóviles partieron al mismo tiempo de un mismo punto en una misma dirección. La velocidad del primer automóvil es de 50 km/h y la del segundo, de 40 km/h. Después de media hora, del mismo punto y en la misma dirección parte un tercer automóvil que alcanza al primero 1,5 h más tarde que al segundo. Hallar la velocidad del tercer automóvil.

192. De los puntos A y B parten al mismo tiempo al encuentro uno del otro un transeúnte y un ciclista. Después de su encuentro, el transeúnte continúa su camino hacia B, mientras que el ciclista, vuelve atrás y se dirige también hacia B. El transeúnte, que partió de A, llega a B t h más tarde que el ciclista. ¿Cuánto tiempo pasó hasta el encuentro del transeúnte con el ciclista si se sabe que la velocidad del transeúnte es k veces menor que la del ciclista?

193. Un cartero que se dirige sin pararse del punto A al punto C a través del punto B, pasa el camino de A a B con una velocidad de 3,5 km/h y el de B a C con la velocidad de 4 km/h. Para conseguir regresar de C a A en el mismo tiempo por el mismo camino, debe hacer 3,75 km por hora en el curso de todo el trayecto. Sin embargo, al llegar, en el camino de regreso, al punto B con la velocidad indicada, se detiene en este punto 14 min y para conseguir regresar al punto A en el tiempo indicado debe pasar de B a A 4 km por hora. Hallar la distancia que hay entre A y B y entre B y C.

194. El camino de A a B de 11,5 km de longitud va al principio cuesta arriba, después por un lugar llano y luego cuesta abajo. Un peatón que se dirige de A a B, pasa todo el camino en 2 horas 54 minutos y en el camino de regreso pierde 3 horas 6 minutos. La velocidad de marcha es la siguiente: cuesta arriba 3 km/h, por el lugar llano 4 km/h y cuesta abajo 5 km/h. ¿Qué extensión ocupa el camino llano?

195. Para los ensayos de motocicletas de diferentes tipos, dos motociclistas parten al mismo tiempo del punto A a B y del punto B a A. La velocidad de los dos motociclistas es constante y al llegar al punto final vuelven inmediatamente hacia atrás. La primera vez se encuentran a la distancia de p km de B y la segunda a q km de A, t horas después del primer encuentro. Hallar la distancia entre A y B y la velocidad de ambos motociclistas.

196. Un avión vuela de A a B en línea recta. Al cabo de cierto tiempo, a causa del viento contrario el avión disminuye su velocidad hasta v km/h, como resultado de lo cual tarda t_1 minutos. Durante su segundo vuelo, el avión, por la misma causa, disminuye su velocidad hasta la misma magnitud, pero a d km más lejos de A que en el primer vuelo y tarda t_2 minutos. Hallar la velocidad inicial del avión.

197. De dos aleaciones con diferente porcentaje de cobre que pesan m kgf y n kgf se cortan dos pedazos de igual peso. El pedazo cortado de la primera aleación se funde con el resto de la segunda y el pedazo cortado de la segunda aleación se funde con el resto de la primera, después de lo cual el porcentaje de cobre en ambas aleaciones se hace igual. ¿Cuánto pesa cada uno de los pedazos cortados?

198. Se tienen dos pedazos de aleación de plata con cobre. Uno de ellos contiene $p\%$ y el otro $q\%$ de cobre. ¿En que proporción se deben tomar las aleaciones del primero y segundo pedazos para obtener una nueva aleación que contenga $r\%$ de cobre? ¿Para cuáles relaciones entre p, q y r el problema es posible y cuál será el peso máximo de la nueva aleación si el primer pedazo pesa P gf y el segundo Q gf?

199. Los obreros A y B trabajaron el mismo número de días. Si A hubiese trabajado un día menos y B 7 días menos, entonces A habría ganado 72 rub. y B, 64 rub. 80 kop. Si al contrario, A hubiese trabajado 7 días menos y B un día menos, B habría ganado 32 rub. 40 kop. más que A. ¿Cuánto ganó cada uno en realidad?

200. Dos cuerpos se mueven por una circunferencia en direcciones opuestas. El primero se mueve uniformemente con una velocidad lineal v y el segundo tiene un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración lineal a. En el instante inicial ambos cuerpos se encontraban en un mismo punto A y la velocidad del segundo era nula. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán por primera vez estos cuerpos si el segundo encuentro será de nuevo en el punto A?

201. Una piscina se llena de agua con ayuda de dos grifos. Al principio, el primer grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo requerido para llenar la piscina valiéndose solamente del segundo grifo. Luego, al contrario, el segundo grifo permaneció abierto una tercera parte del tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso sólo del primer grifo. Después de esto se llenó una $\frac{13}{18}$ parte de la piscina. Calcular el tiempo necesario para llenar la piscina haciendo uso de cada grifo por separado, si manteniendo abiertos ambos grifos a la vez la piscina se llena en 3 horas 36 minutos.

202. Un tubo cilíndrico con pistón se encuentra sumergido en un recipiente con agua; entre el pistón y el agua hay una columna de aire de h m a la presión atmosférica. Luego, el pistón se eleva hasta la altura de b m sobre el nivel del agua en el recipiente. Calcular la altura del agua en el tubo, si se sabe que la altura de la columna de líquido en el barómetro de agua a presión atmosférica es igual a c m.

203. Un tubo cilíndrico en el que se desplaza un pistón está sumergido en una taza con mercurio. En el tubo, el mercurio se encuentra a 12 cm más alto que su nivel en la taza, y la columna de aire sobre el mercurio (hasta el pistón) es igual a $29\frac{3}{4}$ cm. El pistón desciende 6 cm. ¿Cuál será en este caso la altura de la columna de mercurio, si la presión exterior del aire equivale a 76 cm de Hg?

204. En cierto instante el reloj marca 2 minutos menos de lo debido, aunque va adelantado. Si marcase 3 minutos menos de lo que debe marcar, pero se adelantara al día en $\frac{1}{2}$ minuto más de lo que se adelanta, entonces marcaría la hora exacta un día antes que lo marca. ¿En cuántos minutos al día se adelanta este reloj?

205. Dos depositantes depositaron en la caja de ahorros iguales cantidades. El primero retiró su depósito al cabo de m meses y recibió p rub. El segundo, al retirar su depósito pasados los n meses recibió q rub. ¿Cuánto dinero depositó cada uno y qué porcentaje paga la caja de ahorros?

206. Dos puntos se desplazan uniformemente y en una misma dirección por una circunferencia de radio R. Uno de ellos hace una vuelta completa en t s. más rápido que el otro. El tiempo entre dos encuentros consecutivos de los puntos es igual a T. Hallar las velocidades de estos puntos.

207. En un frasco hay una solución de sal de cocina. Del frasco se vierte a una probeta $\frac{1}{n}$ parte de la solución y se concentra por evaporación hasta que el porcentaje de sal en la probeta aumente el doble. Luego, la solución concentrada se vierte de nuevo al frasco. Como resultado, el contenido de sal en el frasco aumenta en un p por ciento. Determinar el porcentaje de sal inicial.

208. Dos recipientes iguales de 30 l de capacidad cada uno, contienen en total 30 l de alcohol. El primer recipiente se llena hasta los bordes con agua, y con la mezcla obtenida se rellena adicionalmente el segundo recipiente. Luego, del segundo recipiente se echan al primero 12 l de la nueva mezcla. ¿Cuánto alcohol había al principio en cada recipiente, si al final en el segundo hay 2 l de alcohol menos que en el primero?

209. Tres turistas A, B y C pasan un embalse de almacenamiento de s km de ancho: A a nado con una velocidad de v km/h, mientras que B y C, con auxilio de un bote automóvil cuya velocidad es v_1 km/h. Pasado cierto tiempo desde el inicio del paso, C decide vencer a nado el resto de la distancia (nada con la misma velocidad que A). B, mientras tanto, vuelve hacia atrás para coger a A. A sube al bote y continúa su camino junto con B. Los tres turistas llegan a la orilla opuesta al mismo tiempo. Hallar el tiempo que consumió el paso.

210. Un tren parte de la estación A en dirección hacia B a las 13 h 00 min. A las 19 h 00 min tuvo que detenerse debido a la obstrucción de la vía por acumulación de nieve. Después de 2 horas se consiguió limpiar la vía y el maquinista, para recuperar el tiempo perdido, conduce el tren el resto del camino a una velocidad que supera en un 20% la velocidad del tren antes de su parada. De resultas, el tren llegó a B con un retraso de 1 h. Al día siguiente el tren que se dirigía de A a B por el mismo horario se detuvo por la misma causa a 150 km más lejos de A que el primer tren. Después de 2 horas de parada, éste también aumentó su velocidad en un 20% en comparación con la inicial, pero consiguió recuperar solamente media hora y tardó a B 1 h 30 min. Hallar la distancia entre A y B.

211. El embarcadero A se encuentra a la distancia de a km río abajo del embarcadero B. Un bote automóvil hace el viaje de A a B y de vuelta (sin detenerse en B) en T horas. Hallar la velocidad del bote en agua muerta y la velocidad de la corriente, si se sabe que en uno de los viajes, al regresar de B a A, el bote sufrió una avería a b km de A, a causa de lo cual se detuvo T_0 h y disminuyó en dos veces su velocidad ulterior, como resultado de lo cual el recorrido de B a A requirió el mismo tiempo que el de A a B.

212. Un depósito de 425 m³ de capacidad se llenó de agua con ayuda de dos grifos. El primer grifo permaneció abierto 5 horas más que el segundo. Si el primer grifo hubiese estado abierto el tiempo que en realidad estuvo abierto el segundo y el segundo, el tiempo que verdaderamente permaneció abierto el primero, entonces, del primer grifo hubiera fluído dos veces menos agua que del segundo. Si se abren los dos grifos al mismo tiempo el depósito se llena al cabo de 17 horas.

Tomando en consideración todas las condiciones señaladas, determinar el tiempo que permaneció abierto el segundo grifo.

213. Según el horario un tren debe pasar el trecho AB de 20 km con una velocidad constante. La primera vez el tren pasó la mitad del camino a dicha velocidad y se detuvo 3 min. Para llegar a tiempo a B el tren tuvo que aumentar su velocidad en la segunda mitad del trecho en 10 km por hora. La segunda vez el tren estuvo parado a la mitad del camino durante 5 min. ¿A qué velocidad tuvo que recorrer el resto del trecho para llegar a B según el gráfico?

214. Dos aviones despegan al mismo tiempo de los puntos A y B al encuentro uno del otro y se encuentran a la distancia de a km de la mitad de AB. Si el primer avión hubiese despegado b horas más tarde que el segundo, entonces se habrían encontrado en la mitad de AB. Si, al contrario, el segundo avión hubiese despegado b horas después de despegar el primero, éstos se habrían encontrado a una cuarta parte de la distancia hasta B. Hallar la distancia entre A y B y la velocidad de los aviones.

215. Del embarcadero A partieron al mismo tiempo río abajo un bote y una balsa. El bote, después de pasar 96 km río abajo, volvió hacia atrás y regresó a A al cabo de 14 horas. Hallar la velocidad del bote en agua muerta y la velocidad de la corriente, si se sabe que en su camino de regreso el bote encontró a la balsa a la distancia de 24 km de A.

216. Dos cuerpos iniciaron su movimiento al mismo tiempo y en una misma dirección a partir de dos puntos, la distancia entre los cuales es igual a 20 m. Uno de ellos, el que se encuentra más atrás, se desplaza en movimiento uniformemente acelerado y en el primer segundo pasa 25 m, mientras que en el segundo siguiente recorre $\frac{1}{3}$ m más. El otro cuerpo se encuentra en movimiento uniformemente retardado y en el primer segundo pasa 30 m, mientras que en el segundo siguiente hace $\frac{1}{2}$ m menos. ¿Dentro de cuántos segundos el primer cuerpo alcanzará al segundo?

217. Una lancha pasa río abajo una distancia de 10 km y después río arriba 6 km. La velocidad de la corriente es igual a 1 km/h. ¿Entre cuáles límites deberá encontrarse la velocidad propia de la lancha para que todo el viaje le ocupe de 3 a 4 horas?

218. Las capacidades de tres recipientes cúbicos A, B y C son entre sí como 1:8:27 y los volúmenes del agua que ellos contienen como 1:2:3. Después del transvase de A a B y de B a C, en los tres recipientes se obtuvo una capa de agua de igual profundidad. Luego, de C a B se transvasan $128\frac{4}{7}$ l y después de esto de B a A una cantidad tal, que la profundidad del agua en A resulta dos veces mayor que en B. Al mismo tiempo resultó que en A hay 100 l de agua menos que en el momento inicial. ¿Cuánto agua había al principio en cada recipiente?

219. Hallar un número de cuatro cifras por las condiciones siguientes: la suma de los cuadrados de las dos cifras extremas es igual a 13; la suma de los cuadrados de las cifras del medio es igual a 85. Si del número buscado se resta 1089, se obtiene un número que se escribe con las mismas cifras, pero en orden contrario.

220. Dos puntos se desplazan por una circunferencia de l m de longitud con las velocidades v y $w < v$. ¿Pasado cuánto tiempo después del inicio del movimiento sucederán los encuentros consecutivos de los puntos, si éstos se mueven en una misma dirección y el primero comenzó su movimiento t segundos antes que el segundo, retrasándose al principio a m del segundo en sentido del movimiento $(a < l)$?

221. Una aleación de dos metales de P kgf de peso pierde en el egua A kgf. Un pedazo de uno de los metales que componen la aleación, de P kgf de peso, pierde en el agua B kgf de peso, y del otro, C kgf. Hallar el peso de los metales que componen la aleación y estudiar la posibilidad de la solución del problema en dependencia de las magnitudes P, A, B y C.

222. Unas balsas partieron del punto A hacia la desembocadura del río a favor de la corriente. En la desembocadura del río un barco las tomó a remolque y pasados $17\frac{1}{8}$ días desde el momento en que salieron del punto A las condujo por un lago al punto B. ¿Cuánto tiempo remolcó el barco a las balsas por el lago desde la desembocadura del río hasta el punto B, si se sabe que el barco hacía (sin remolque) el viaje de A a B en 61 horas y de B a A en 79 horas, y que la velocidad durante el remolque es dos veces menor?

223. En el trozo de A a B de un río, la corriente es tan débil que se puede despreciar; en la sección de B a C la corriente ya es bastante fuerte. Una lancha salva la distancia de A a C río abajo en 6 horas de C a A, río arriba, en 7 horas. Si la corriente en el trozo entre A y B fuera la misma que en la sección de B a C, entonces todo el camino de A a C ocuparía 5,5 horas. ¿Cuánto tiempo se necesitaría, en este caso, para recorrer el camino de C a A río arriba?

224. Un vaso contiene una solución de un $p\%$ de ácido. De éste se vierten a l y se añade la misma cantidad de solución de $q\%$ de ácido ($q < p$). Luego, después del mezclado, esta operación se repite $k-1$ veces, como resultado de lo cual se obtiene una solución de $r\%$ de concentración. Hallar la capacidad del vaso.

225. En una caja de ahorros que paga un $p\%$ anual se depositan A rublos. A final de cada año el depositario retira B rublos. ¿Dentro de cuántos años, al retirar la suma correspondiente, el resto será tres veces más que el depósito inicial? ¿Para cuáles condiciones el problema tiene solución?

226. En una parcela forestal, el acrecimiento anual de madera es igual a un $p\%$. Cada invierno se asierra cierta cantidad x de madera. ¿Cuál deberá ser x para que dentro de n años la cantidad de madera en la parcela aumente q veces, si la cantidad inicial de madera es igual a a?

227. Se tienen n recipientes cilíndricos iguales. El primero se llena por completo de alcohol y los demás hasta la mitad de una mezcla de alcohol con agua, con la particularidad de que la concentración de alcohol en cada recipiente es k veces menor que en el anterior. Con el contenido del primer recipiente se llenó hasta los bordes el segundo, después con el contenido del segundo, el tercero y así sucesivamente hasta el último. Hallar la concentración de alcohol obtenida en el último recipiente.

228. Se examina una fracción (la relación entre dos números enteros), cuyo denominador es menor en una unidad que el cuadrado del numerador. Si añadimos dos unidades al numerador y al denominador el valor de la fracción será mayor que $\frac{1}{3}$. Si del numerador y del denominador se restan tres unidades, la fracción sigue siendo positiva, pero será menor que $\frac{1}{10}$. Hallar esta fracción.

7. Problemas diferentes

TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS

229. Calcular la suma

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}.$$

230. Simplificar la expresión

$$(x+a)(x^2+a^2)\dots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}).$$

231. Simplificar la expresión

$$(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\dots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}).$$

232. Se dan dos series de números:

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n, \\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n; \end{gathered}$$

suponiendo que sea $S_k=b_1+b_2+\dots+b_k$, demostrar que

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+\dots$$
$$\dots+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n.$$

233. Demostrar que de la igualdad

$$a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab,$$

donde a, b y c son números reales, se deduce que $a=b=c$.

234. Demostrar que si $a^3+b^3+c^3=3abc$, entonces, o bién

$$a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab,\ \text{ó}\ a+b+c=0.$$

235. Demostrar que si

$$\begin{gathered} a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=p^2, \\ b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2=q^2, \\ a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=pq \end{gathered}$$

y $pq\neq 0$, entonces $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $\dots$, $a_n=\lambda b_n$, donde $\lambda=\frac{p}{q}$. (Todas las magnitudes se suponen reales).

236. Se conoce que la secuencia de los números a_1, a_2, a_3, $\dots$ para cualquiera que sea n, satisface a la relación

$$a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1$$

Expresar a_n por medio de a_1, a_2 y n.

237. La sucesión de los números a_1, a_2, a_3, $\dots$, a_n, $\dots$ para $n>2$ satisface a la relación

$$a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2},$$

donde α y β $(\alpha\neq\beta)$ son números conocidos. Expresar a_n por medio de α, β, a_1, a_2.

TEOREMA DE BEZOUT, PROPIEDADES DE LAS RAICES DE LOS POLINOMIOS

238. Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación $x^2-3ax+a^2=0$ son tales que $x_1^2+x_2^2=1,75$. Determinar a.

239. Se tiene la ecuación $x^2+px+q=0$. Componer una ecuación cuadrática, cuyas raíces sean

$$y_1=x_1^2+x_2^2, \quad y_2=x_1^3+x_2^3.$$

240. Supongamos que sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (ac\neq 0).$$

Sin resolver la ecuación, expresar por medio de sus coeficientes las cantidades:

$$1)\ \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}; \qquad 2)\ x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4.$$

241. ¿Cuáles condiciones deberán satisfacer los coeficientes reales a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 y b_3 para que la expresión

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2$$

sea el cuadrado de un polinomio de primer grado respecto de x con coeficientes reales?

242. Demostrar que las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+px+q=0$ con coeficientes reales son negativas o tienen una parte real negativa en el único caso cuando $p>0$, $q>0$.

243. Demostrar que si ambas raíces de la ecuación

$$x^2+px+q=0$$

son positivas, entonces las raíces de la ecuación

$$qy^2+(p-2rq)\,y+1-pr=0$$

serán también positivas para todos los valores de $r\geqslant 0$. Aclarar si es justa esta afirmación siendo $r<0$.

244. Hallar todos los valores reales de p para los cuales las raíces de la ecuación

$$(p-3)\,x^2-2px+6p=0$$

son reales y positivas.

245. Para cualquier valor positivo de λ todas las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c+\lambda=0$$

son reales y positivas. Demostrar que en este caso $a=0$ (se supone que los coeficientes a, b y c son reales).

246. Demostrar que ambas raíces de la ecuación

$$x^2+x+1=0$$

satisfacen a la ecuación

$$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=0,$$

donde m, n y p son números enteros cualesquiera.

247. El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a(x^2+y^2)+x+y-\lambda=0, \\ x-y+\lambda=0 \end{aligned}\right\}$$

tiene soluciones reales para cualquier valor de λ. Demostrar que $a=0$.

248. Demostrar que para cualesquiera valores reales de a, p y q, las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a^2}$$

son reales.

249 Demostrar que la ecuación cuadrática

$$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)\,x+b^2=0$$

no puede tener raíces reales si $a+b>c$ y $|a-b|<c$.

250. Se conoce que x_1, x_2 y x_3 son las raices de la ecuación

$$x^3-2x^2+x+1=0.$$

Componer una nueva ecuación, cuyas raíces sean los números

$$y_1=x_2x_3, \quad y_2=x_3x_1, \quad y_3=x_1x_2.$$

251. Se conoce que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación

$$x^3-x^2-1=0$$

Componer una nueva ecuación, cuyas raíces sean los números

$$y_1=x_2+x_3, \quad y_2=x_3+x_1, \quad y_3=x_1+x_2.$$

252. Expresar el término independiente c de la ecuación cúbica

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

por medio de los coeficientes a y b, conociendo que las raíces de la ecuación forman una progresión aritmética.

253. Supongamos que todas las raices de cierta ecuación

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

sean positivas. ¿A cuál condición suplementaria deberán satisfacer sus coeficientes p, q y r para que de los segmentos, cuyas longi tudes son iguales a estas raices, se pueda construir un triángulo?

Indicación. Estudiar la expresión

$$(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2).$$

254. Las ecuaciones

$$x^3+p_1x+q_1=0,$$
$$x^3+p_2x+q_2=0$$

$(p_1 \neq p_2,\ q_1 \neq q_2)$ tienen una raíz común. Hallar esta raíz y las demás raíces de ambas ecuaciones.

255. Hallar todos los valores de λ para los cuales las ecuaciones

$$\lambda x^3-x^2-x-(\lambda+1)=0$$
$$\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$$

tienen una raíz común y hallar esta raíz.

256. Todas las raíces del polinomio

$$P(x)=x^3+px+q$$

con coeficientes reales y $q \neq 0$ son reales. Demostrar que $p < 0$.

257. Demostrar que la ecuación

$$x^3+ax^2-b=0,$$

donde a y b son reales y $b>0$, tiene solamente una raíz positiva.

258. Hallar todos los valores reales de a y b para los cuales las ecuaciones

$$x^3+ax^2+18=0,$$
$$x^3+bx\ +12=0$$

tienen dos raíces comunes y determinar estas raíces.

259. Demostrar que

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

260. Supongamos que a, b y c sean por pares números no iguales entre sí.

Demostrar que la expresión

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

no es igual a cero.

261. Descomponer en factores la expresión

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

262. Demostrar que si tres números reales a, b y c están enlazados por la relación

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c},$$

entonces, obligatoriamente dos cualesquiera de estos números son iguales en valor absoluto y tienen signos contrarios.

263. Determinar para cuales valores complejos de p y q el binomio x^4-1 se divide por el trinomio cuadrado x^2+px+q.

264. ¿Para cuáles valores de a y n el polinomio

$$x^n-ax^{n-1}+ax-1$$

es divisible por $(x-1)^2$?

265. Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $x-a$, el resto es A, al dividirlo por $x-b$, el resto es B, y si se divide por $x-c$, el resto es C. Hallar el polinomio que se obtiene en el resto de la división de $p(x)$ entre $(x-a)(x-b)(x-c)$, admitiendo que entre los números a, b y c no hay iguales.

MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En los problemas propuestos a continuación es conveniente usar el método de inducción matemática completa. Para demostrar que cierta afirmación es justa para cualquier número real n, es suficiente demostrar que: a) esta afirmación es justa para $n=1$; b) si esta afirmación es justa para cualquier número real n, será también justa para el número consecuente $n+1$.

266. Demostrar que

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

267. Demostrar que

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

268. Demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

269. Demostrar la fórmula de Moivre

$$(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)^n=\cos n\varphi+i\operatorname{sen}n\varphi.$$

270. Demostrar que para cualquier valor entero y positivo de n, la cantidad

$$a_n=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}},\quad \text{donde } a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

es un número entero y positivo.

271. Demostrar que si los números reales $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ satisfacen a la condición $-1 < a_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces para cualquier valor de n se cumple la desigualdad

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

272. La enésima potencia generalizada de cualquier número a, designada por el símbolo $(a)_n$, para los valores enteros y no negativos de n se determina de la siguiente manera: si $n=0$, $(a)_n=1$, siendo $n>0$, $(a)_n = a(a-1)\ldots(a-n+1)$. Demostrar que para la potencia generalizada de la suma de dos números es válida la fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)_n = \binom{n}{0}(a)_0(b)_n + \binom{n}{1}(a)_1(b)_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}(a)_n(b)_0.$$

VALORES MAXIMOS Y MINIMOS

Para hallar el valor mínimo del trinomio cuadrado

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

en el caso en que $a > 0$, el trinomio se representa en la forma

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{2}$$

Puesto que el primer sumando en el miembro derecho no es negativo sea cual fuere el valor de x y el segundo sumando no depende de x, el trinomio adquiere su valor mínimo con la condición de que el primer sumando es igual a cero.

Así pues, el valor mínimo del trinomio es igual a

$$y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{3}$$

Este se alcanza siendo

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \tag{4}$$

De forma análoga se examina el problema sobre el valor *máximo* del trinomio en el caso en que $a < 0$

273. Dos ferrocarriles rectos AA' y BB' son perpendiculares entre sí y se cruzan en el punto C. Las distancias AC y BC son respectivamente iguales a a y b. De los puntos A y B parten al mismo tiempo dos trenes en dirección hacia C con las velocidades v_1 y v_2 respectivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de su partida la distancia entre los trenes será mínima? ¿A qué es igual esta distancia mínima?

274. Los puntos A y B se encuentran en la vía principal y rectilínea que va del Oeste al Este. El punto B se encuentra a 9 km más al Este que A. Un coche parte del punto A hacia el Este, y se desplaza uniformemente con una velocidad de 40 km/h. Al mismo tiempo, una motocicleta sale del punto B en la misma dirección con una aceleración constante igual a 32 km/h². Hallar la distancia máxima entre el coche y la motocicleta en el curso de las dos primeras horas de movimiento.

Indicación. Es útil trazar la gráfica de la distancia entre el coche y la motocicleta en función del tiempo.

275. Hallar el valor máximo de la expresión

$$ {}^{2}\log^4 x + 12\,{}^{2}\log^2 x \cdot {}^{2}\log \frac{8}{x}, $$

suponiendo que x varía entre 1 y 64.

276. Hallar el valor máximo de la función

$$ y = \frac{x}{ax^2 + b} \qquad (a > 0,\ b > 0). $$

277. Hallar el valor mínimo de la expresión

$$ \frac{1+x^2}{1+x} $$

siendo $x \geqslant 0$.

278. Hallar el valor mínimo de la función

$$ \varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|, $$

donde $a < b < c < d$ son números reales fijos y x adquiere valores reales arbitrarios.

Indicación. Es cómodo llevar a cabo los razonamientos señalando los números a, b, c y d en el eje numérico.

NUMEROS COMPLEJOS

279. Hallar todos los valores de z que satisfacen la igualdad

$$ z^2 + |z| = 0 $$

($|z|$ es el módulo del número complejo z).

280. Hallar el número complejo z que satisface a las igualdades

$$ \left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1. $$

281. Hallar el producto de la multiplicación

$$ \left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]. $$

282. Entre los números complejos z que satisfacen a la condición

$$|z-25i| \leqslant 15,$$

hallar el número con menor argumento. Trazar el dibujo.

283. ¿A cuál condición deberá satisfacer el número complejo $a+bi$ para que se le pueda presentar en la forma

$$a+bi=\frac{1-ix}{1+ix},$$

donde x es un número real?

284. ¿Cuál valor máximo puede adquirir el módulo del número complejo z si

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1?$$

285. A través del punto A se han trazado n rayos bajo ángulos iguales a $\frac{2\pi}{n}$. En uno de estos rayos, a la distancia d de A se ha tomado un punto B, del cual se baja una perpendicular al rayo vecino. De la base de esta perpendicular se baja de nuevo una perpendicular al rayo siguiente y así sucesivamente hasta lo infinito. Hallar la longitud L de la línea quebrada que se enreda alrededor de A, obtenida de este modo, y aclarar cómo variará L al aumentar el número n, en particular, al aumentarlo ilimitadamente.

286. Un número de seis cifras empieza por la izquierda con la cifra 1. Si se pasa esta cifra del primer lugar al último sin alterar el orden de las demás cinco cifras, se obtiene un nuevo número tres veces mayor que el inicial. Hallar el número inicial.

287. Demostrar que si el número real $p=abc$ (a, b y c son cifras de las clases correspondientes) es divisible entre 37, entonces los números $q=bca$ y $r=cab$ también son divisibles por 37.

288. Demostrar que la suma de los cubos de tres números enteros sucesivos es divisible entre 9.

289. Demostrar que la suma

$$S_n=n^3+3n^2+5n+3$$

es divisible entre 3 para cualquier valor entero y positivo de n.

290. 120 bolas iguales se han colocado compactamente en forma de una pirámide triangular regular. ¿Cuántas bolas hay en la base?

291. En un cajón se han metido k cajones. En cada uno de estos k cajones, o bien se han metido k cajones o no se ha metido ni uno y así sucesivamente. Hallar la cantidad de cajones vacíos si m cajones resultaron llenos.

GEOMETRIA

A. PLANIMETRIA

Observaciones preliminares

Señalemos las siguientes relaciones entre los elementos de un triángulo de lados a, b y c y los ángulos opuestos A, B y C correspondientemente.

1. Teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R,$$

donde R es el radio del círculo inscrito.

2. Teorema de los cosenos:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Para calcular el área S de un triángulo, además de la fórmula

$$S=\frac{1}{2}ah_a,$$

donde a es uno de los lados del triángulo y h_a es la altura bajada a este lado, a continuación se emplean las siguientes fórmulas:

Fórmula de Heron

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde $p=\frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro;

$$S=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C;\ S=rp,$$

donde r es el radio del círculo inscrito en el triángulo y p es el semiperímetro.

1. Problemas de cálculo

292. En el triángulo ABC, el ángulo A es dos veces mayor que el B. Por los lados conocidos b y c hallar el lado a.

293. Los catetos de un triángulo rectángulo son iguales a b y c. Hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto.

294. Hallar el tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados a y b, y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados se cruzan formando un ángulo recto. ¿Para cuáles condiciones existe este triángulo?

295. El ángulo del vértice de un triángulo, cuyos lados laterales son iguales a a y b ($a < b$), está dividido en tres partes iguales por rectas cuyos segmentos dentro del triángulo son entre sí como $m:n$ ($m < n$). Hallar las longitudes de estos segmentos.

296. Intersecar el triángulo dado ABC con una recta DE paralela al lado BC, de modo que el área del triángulo BDE sea igual a la magnitud dada k^2. ¿Para cuáles relaciones entre k^2 y el área del triángulo ABC el problema es soluble y cuántas soluciones tiene?

297. A través de cierto punto tomado dentro del triángulo, se han trazado tres rectas paralelas respectivamente a sus lados. Estas rectas dividen al área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3. Hallar el área del triángulo dada.

298. Los lados b y c de un triángulo son conocidos. Hallar el tercer lado x, si se sabe que es igual a la altura bajada a esta lado. ¿Para cuáles relaciones entre b y c existe este triángulo?

299. En el triángulo ABC se han trazado las alturas AA_1, BB_1 y CC_1, cuyas bases se han unido entre sí. Determinar la relación entre el área del triángulo $A_1B_1C_1$ y el área del triángulo ABC, si se conocen los ángulos del triángulo ABC.

300. En el triángulo ABC, a través del punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y C, se ha trazado una recta MN paralela a BC hasta su intersección con los lados AB y AC en los puntos M y N respectivamente. Hallar la dependencia entre los segmentos MN, BM y CN.

Examinar los casos:

1) las dos bisectrices son interiores;

2) las dos bisectrices son exteriores;

3) una de las bisectrices es interior y la otra exterior.

¿Cuándo coincidirán los puntos M y N?

301. Dentro de un triángulo regular se ha tomado un punto arbitrario P, desde el cual se han bajado las perpendiculares PD, PE y PF a los lados BC, CA y AB respectivamente. Hallar

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}.$$

302. Hallar la relación entre el área del triángulo ABC y el área de otro triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas del triángulo ABC.

303. En un triángulo con lados a, b y c se ha inscrito una semicircunferencia, cuyo diámetro se encuentra sobre el lado c. Hallar el radio de esta semicircunferencia.

304. Hallar los ángulos de un triángulo rectángulo, si se sabe que el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo es al radio de la circunferencia inscrita como $5:2$.

305. A un rectángulo dado circunscribir un nuevo rectángulo, el área del cual sea igual a m^2. ¿Para cuál valor de m es soluble el problema?

306. Sobre el lado AB del rectángulo $ABCD$ hallar un punto E, desde el cual los lados AD y DC se vean bajo ángulos iguales. ¿Para cuál relación entre los lados del rectángulo es soluble el problema?

307. Hallar el área de un trapecio isósceles, si su altura es igual a h y su lado lateral se ve desde el centro de la circunferencia circunscrita bajo el ángulo α.

308. Se conocen las bases superior e inferior a y b de un trapecio. Hallar la longitud del segmento que une las mitades de las diagonales del trapecio.

309. Cada uno de los vértices de un paralelogramo se ha unido con las mitades de los dos lados opuestos. ¿Qué parte del área del paralelogramo compone el área de la figura limitada por las líneas trazadas?

310. Los puntos P, Q, R y S son respectivamente las mitades de los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo $ABCD$. Hallar el área de la figura limitada por las rectas AQ, BR, CS y DP, si se conoce que el área del paralelogramo es igual a a^2.

311. Se conocen las cuerdas de dos arcos de una circunferencia de radio R. Hallar la cuerda del arco igual a la suma de los arcos dados o a su diferencia.

312. La distancia entre los centros de dos circunferencias que se cruzan, de radios R y r, es igual a d. Hallar el área de su parte común.

313. Tres circunferencias de radios r, r_1 y R tienen contacto exterior de dos en dos. Hallar la longitud de la cuerda cortada por la tercera circunferencia de la tangente interna común de las dos primeras circunferencias.

314. Dos circunferencias de radios R y r $(R > r)$ tienen contacto interior. Hallar el radio de una tercera circunferencia que hace contacto con las dos primeras y con su diámetro común.

315. Tres circunferencias iguales que tienen contacto entre sí de dos en dos, hacen contacto exterior con un círculo de radio r. Hallar las áreas de los tres triángulos curvilíneos formados por dichas circunferencias.

316. Con el segmento de longitud $2a+2b$ y sus partes de longitudes $2a$ y $2b$ tomados como diámetros, se han construido semicircunferencias que se encuentran a un mismo lado del segmento. Hallar el radio de la circunferencia que hace contacto con las tres circunferencias construidas.

317. Se tienen dos rectas paralelas y un punto A entre ellas. Hallar los lados del triángulo rectángulo, el vértice del ángulo recto del cual se encuentra en el punto A y los vértices de los ángulos agudos descansan en las rectas paralelas dadas, si se conoce que el área del triángulo es igual a una magnitud dada k^2.

318. Dentro de un polígono regular de n lados iguales a a se han inscrito n circunferencias iguales de modo que cada una de éstas hace contacto con dos lados contiguos del polígono y con otras dos circunferencias. Hallar el área de la "estrella" formada en el centro del polígono.

319. Por uno de los puntos C del arco AB de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda AB en los puntos D y E y a la circunferencia, en los puntos F y G. ¿Para cuál posición del punto C en la cuerda AB, al cuadrilátero $DEGF$ se le puede circunscribir una circunferencia?

320. Dentro de un ángulo agudo se inscriben circunferencias que hacen contacto una con otra. Demostrar que los radios de estas circunferencias forman una progresión geométrica. Hallar la dependencia entre el denominador de la progresión y la magnitud del ángulo agudo.

321. En el punto A de un plano P está ubicado un manantial de luz. Sobre el plano se ha colocado un espejo semiesférico de radio 1, cuya superficie especular interior está dirigida hacia el plano de tal modo que el eje de simetría del espejo es perpendicular al plano P en el punto A. Determinar la distancia desde el espejo hasta el plano y el radio del círculo iluminado en el plano P, si se conoce que el ángulo mínimo entre los rayos reflejados por el espejo y el plano P es igual a 15°.

322. Los centros de cuatro circunferencias de radio r están dispuestos en los vértices de un cuadrado cuyo lado es a. Hallar el área S de la parte común de las cuatro circunferencias que se encuentra dentro del cuadrado.

323. Las diagonales de un trapecio dividen a éste en cuatro triángulos. Hallar el área del trapecio, si las áreas de los triángulos adyacentes a las bases son iguales a S_1 y S_2.

324. Expresar las diagonales de un cuadrilátero inscrito por medio de sus lados. Obtener el teorema de Ptolomeo: en todo cuadrilátero inscriptible el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

2. Problemas de construcción

325. Se conocen dos circunferencias de diferentes radios, una fuera de la otra, y un punto A en una de ellas. Trazar una tercera circunferencia que haga contacto con las dos dadas y que pase por el punto A. Examinar los distintos casos posibles de disposición del punto A en la circunferencia dada.

326. Se conocen una circunferencia, una recta y un punto A sobre esta recta. Trazar una nueva circunferencia que haga contacto con la circunferencia y la recta dadas y que pase por el punto A. Examinar detalladamente las soluciones que tiene el problema en distintos casos.

327. Se tienen una recta, una circunferencia y un punto A en esta circunferencia. Trazar una nueva circunferencia que haga contacto con la recta y la circunferencia dadas y que pase por el punto A. Analizar detalladamente las soluciones que tiene el problema en cada caso determinado.

328. Construir un triángulo rectángulo, si se conocen su hipotenusa c y la altura h bajada a la hipotenusa. Hallar la longitud de los catetos y aclarar para cuál relación entre h y c es soluble el problema.

329. Se conocen las longitudes de los lados AB, BC, CD y DA de cierto cuadrilátero plano. Trazar este cuadrilátero, si se sabe que la diagonal AC divide al ángulo A por la mitad.

330. Trazar un triángulo por los puntos de intersección de las prolongaciones de la bisectriz, la mediana y la altura que parten de un mismo vértice, con el círculo de la circunferencia circunscrita al triángulo.

331. Tomando los vértices de un triángulo como centros, circunscribir circunferencias de modo que hagan contacto de dos en dos. Examinar los casos de contacto exterior y los casos de contacto interior.

332. Inscribir el triángulo ABC en una circunferencia dada, si se conocen el vértice A, la dirección de la altura h_A y el punto de intersección de la altura h_B con la circunferencia.

333. Cortar un trapecio con una recta paralela a la base, de modo que el segmento de esta recta dentro del trapecio se divida por las diagonales en tres partes iguales.

334. Construir un cuadrado, si se conocen uno de sus vértices y dos puntos ubicados en los dos lados, o sus continuaciones, que no pasan por el vértice dado.

335. A través de un punto M que se encuentra sobre la base AC del triángulo ABC, trazar una recta MN, que separe del triángulo una parte, cuya área sea igual a $\frac{1}{k}$ del área de todo el triángulo. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

336. En un triángulo dado inscribir, haciendo uso de un compás y una regla, un rectángulo con una de sus diagonales dadas.

337. A una circunferencia dada circunscribir un triángulo, si se conoce uno de sus ángulos y el lado opuesto a este ángulo. Hallar la condición de solubilidad de este problema.

338. Se tienen una recta CD y dos puntos A y B no pertenecientes a esta recta. Hallar en la recta dada un punto M de modo que

$$\angle AMC = 2 \angle BMD.$$

3. Problemas de demostración

339. Demostrar que la mediana de todo triángulo es menor que la semisuma de los lados que la comprenden y mayor que la diferencia entre esta semisuma y la mitad del tercer lado.

340. Demostrar que en todo triángulo ABC la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita a este triángulo hasta su lado BC es dos veces menor que la distancia del punto de intersección de las alturas al vértice A.

341. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto cualquiera, tomado dentro de un triángulo regular, hasta los lados de este triángulo es una magnitud constante, que no depende de la posición del punto.

342. Demostrar que en todo triángulo, al mayor lado le corresponde menor bisectriz.

343. Demostrar que si P, Q, R son respectivamente los puntos de intersección de los lados BC, CA y AB (o sus prolongaciones) del triángulo ABC con cierta recta, entonces

$$\frac{PB}{PC}\frac{QC}{QA}\frac{RA}{RB}=1.$$

344. En el triángulo rectángulo ABC el cateto AC es tres veces mayor que AB. El cateto AC está dividido por los puntos K y F en tres partes iguales. Demostrar que

$$\angle AKB+\angle AFB+\angle ACB=\frac{\pi}{2}.$$

345. Supongamos que sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo, c su hipotenusa y h la altura bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa. Demostrar que el triángulo con los lados h, $c+h$ y $a+b$ es rectángulo.

346. En un triángulo isósceles de base a y lado b, el ángulo del vértice es igual a 20°. Demostrar que $a^3+b^3=3ab^2$.

347. Demostrar que el ángulo de un triángulo será agudo, recto u obtuso, según que el lado opuesto sea menor, igual o mayor que el doble de la mediana correspondiente.

348. En el triángulo isósceles ABC el ángulo del vértice B es igual a 20°. En los lados AB y BC se han tomado respectivamente los puntos Q y P de modo que $\angle ACQ=60°$ y $\angle CAP=$ $=50°$. Demostrar que $\angle APQ=80°$.

349. Demostrar que si entre los lados a, b y c de un triángulo existe la dependencia $a^2=b^2+bc$, entonces los ángulos A y B opuestos a los lados a y b satisfacen a la igualdad $\angle A=2\angle B$.

350. El triángulo AOB ha sido girado en su plano 90° alrededor del vértice O, como resultado de lo cual el vértice A ha pasado al punto A_1 y el vértice B, al B_1. Demostrar que en el triángulo OAB_1 la mediana del lado AB_1 es la altura del $\triangle OA_1B$ (de manera análoga, la mediana del lado A_1B en el triángulo OA_1B es la altura del $\triangle OAB_1$).

351. Demostrar que la suma de los productos de las alturas de un triángulo acutángulo por los segmentos de éstas comprendidos entre el ortocentro y el vértice es igual a la semisuma de los cuadrados de los lados. Generalizar esta proposición para el caso de un triángulo obtusángulo.

352. Supongamos que las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo satisfacen a las desigualdades $a<b<c$, formando

una progresión aritmética. Demostrar que $ac = 6Rr$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo y r, el radio de la circunferencia inscrita en el mismo.

353. Demostrar que el cuadrado de la bisectriz, trazada desde el vértice de un triángulo arbitrario, es igual al producto de los lados laterales menos el producto de los segmentos de la base. Aclarar el sentido de la igualdad indicada para el caso de un triángulo isósceles.

354. Sobre los lados AB y AC del triángulo ABC se han trazado, en sentidos opuestos, dos segmentos $BD = CE$. Demostrar que el segmento DE se divide por el lado BC en proporción inversa a la proporción de los lados AB y AC.

355. Demostrar que en todo triángulo la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.

356. Demostrar que una recta simétrica con la mediana respecto a la bisectriz del ángulo interno de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales a los cuadrados de los lados contiguos.

357. Sobre los lados de un triángulo ABC se han tomado los puntos P, Q y R de modo que tres rectas AP, BQ y CR se intersecan en un mismo punto. Demostrar que

$$AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA.$$

358. Demostrar que en todo triángulo, la relación entre los radios R y r de las circunferencias circunscrita e inscrita y la distancia l entre los centros de estas circunferencias es

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

359. Demostrar que en todo triángulo, la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo y el radio de la circunferencia inscrita en el mismo no supera a $\frac{1}{2}$.

360. Demostrar que para todo triángulo rectángulo es válida la desigualdad

$$0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5,$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita y h, la altura bajada a la hipotenusa.

361. Demostrar que en todo triángulo acutángulo

$$k_a + k_b + k_c = r + R,$$

donde k_a, k_b y k_c son las perpendiculares bajadas del centro de la circunferencia circunscrita, a los lados correspondientes; r y R son los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.

Indicación. Los miembros izquierdo y derecho de la igualdad buscada pueden ser expresados por medio de los lados y los ángulos del triángulo.

362. Los vértices A, B y C de un triángulo están unidos con los puntos A_1, B_1 y C_1 dispuestos arbitrariamente sobre los lados opuestos (excepto en los vértices). Demostrar que los puntos medios de los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 no se encuentran en una misma recta.

363. A través de un punto arbitrario O, tomado dentro del triángulo ABC, se han trazado las rectas DE, FK y MN paralelas respectivamente a AB, AC y BC. Los puntos F y M se encuentran sobre el lado AB; E y K, sobre BC y N y D, sobre AC. Demostrar que

$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=1.$$

364. En un triángulo se ha inscrito un cuadrado de modo que uno de sus lados se encuentra sobre el lado mayor del triángulo. Demostrar que la desigualdad $\sqrt{2}r < x < 2r$, donde x es la longitud del lado del cuadrado y r es el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

365. Demostrar que los puntos medios de los lados de un triángulo, las bases de las alturas y los puntos medios de los segmentos de las alturas, comprendidos entre cada vértice y el punto de intersección de las alturas, representan nueve puntos que se encuentran en una misma circunferencia. Demostrar, al mismo tiempo, que el centro de esta circunferencia es el punto medio del segmento que une el punto de intersección de las alturas del triángulo dado con el centro de la circunferencia circunscrita y que su radio es igual a la mitad del radio de la circunferencia circunscrita.

366. En un triángulo, desde las bases de cada altura se han bajado perpendiculares a los otros dos lados. Demostrar que: 1) las bases de estas perpendiculares son los vértices de un hexágono, tres lados del cual son paralelos a los lados del triángulo; 2) a este hexágono se le puede circunscribir una circunferencia.

367. Demostrar que en todo triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a la suma de los diámetros de las circunferencias inscrita y circunscrita.

368. Demostrar que en el triángulo rectángulo, la bisectriz del ángulo recto divide en dos partes iguales al ángulo formado por la mediana y la altura bajada a la hipotenusa.

369. Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ están dispuestos simétricamente uno al otro respecto al centro de la circunferencia común de radio r, circunscrita a estos triángulos. Demostrar que el producto de las áreas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ y los seis triángulos obtenidos de la intersección de sus lados es igual a r^{16}.

370. Demostrar que la diferencia entre la suma de los cuadrados de las distancias desde un punto arbitrario M de un plano hasta dos vértices opuestos del paralelogramo $ABCD$ y la suma de los cuadrados de las distancias desde el mismo punto hasta los otros dos vértices es una magnitud constante.

371. Sobre los lados del triángulo ABC se han construido los triángulos equiláteros ABC_1, BCA_1 y CAB_1, no superpuestos al $\triangle ABC$. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se intersecan en un punto.

372. Sobre los lados AB, AC y BC del triángulo ABC, tomados como bases, se han construido tres triángulos isósceles semejantes ABP, ACQ y BCR, los dos primeros fuera del triángulo dado y el tercero hacia el mismo lado que éste. Demostrar que $APRQ$ es un paralelogramo (o que los puntos A, P, R y Q pertenecen a una misma recta).

373. Cierto punto O de un plano se ha unido con los vértices del paralelogramo $ABCD$. Demostrar que el área del triángulo AOC es igual a la suma o a la diferencia de dos de los triángulos adyacentes formados por dos de las rectas OA, OB, OC y OD y el lado correspondiente del paralelogramo. Examinar los casos cuando el punto O se encuentra dentro y fuera del paralelogramo.

374. En el trapecio $ABCD$ la suma de los ángulos de la base AD es igual a $\frac{\pi}{2}$. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de las bases es igual a la semidiferencia de las bases.

375. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un trapecio es igual a la suma de los cuadrados de los lados laterales con el doble del producto de las bases.

376. Demostrar que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.

377. Demostrar que si el segmento que une los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los otros dos lados, el cuadrilátero es un trapecio.

378. Demostrar que si las diagonales de dos cuadriláteros son respectivamente iguales y se intersecan formando ángulos iguales, los cuadriláteros son equidimensionales.

379. Demostrar que por lo menos una de las bases de las perpendiculares bajadas desde un punto tomado arbitrariamente dentro de un polígono convexo a los lados de éste, se encuentra en el mismo lado, y no en su prolongación.

380. Demostrar que las bisectrices de los ángulos internos de un paralelogramo, en su intersección forman un rectángulo, cuyas diagonales son iguales a la diferencia de los lados adyacentes del paralelogramo.

381. Demostrar que las rectas que unen sucesivamente los centros de los cuadrados construidos sobre los lados de un paralelogramo y que son contiguos a éste por fuera, forman también un cuadrado.

382. Demostrar que si en un cuadrilátero arbitrario $ABCD$ se trazan las bisectrices internas, los cuatro puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C con las bisectrices de los ángulos B y D se encuentran sobre una circunferencia.

383. A una circunferencia se le han trazado dos tangentes. Demostrar que la longitud de la perpendicular bajada desde un punto arbitrario de la circunferencia a la cuerda que une los puntos de contacto de estas tangentes con la circunferencia, es la media proporcional entre las longitudes de las perpendiculares trazadas desde el mismo punto a las propias tangentes.

384. Demostrar que las bases de las perpendiculares bajadas desde un punto arbitrario de una circunferencia a los lados de un triángulo inscrito en esta última, se encuentran en una misma recta.

385. Tres circunferencias iguales se cruzan en un punto. El segundo punto de intersección de dos cualesquiera de estas circunferencias y el centro de la tercera determinan a la recta que pasa por dichos puntos. Demostrar que las tres rectas que se obtienen se intersecan en un punto.

386. Dos circunferencias tienen contacto interno en el punto A. El segmento AB es el diámetro de la circunferencia mayor. La cuerda BK de la circunferencia mayor hace contacto con la circunferencia menor en el punto C. Demostrar que AC es la bisectriz del triángulo ABK.

387. En el sector de una circunferencia de radio R se ha inscrito una circunferencia de radio r. La cuerda del sector es igual a $2a$. Demostrar que

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}.$$

388. A una circunferencia se le han trazado dos tangentes que cortan en los puntos A y B a una recta que pasa por el centro de la circunferencia, formando con esta recta ángulos iguales. Demostrar que cualquier tangente (móvil) corta en las tangentes (fijas) dadas unos segmentos AC y BD, el producto de los cuales es constante.

389. Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de dos cuerdas de una circunferencia, perpendiculares entre sí y que se cruzan, es mayor que el cuadrado del diámetro de la circunferencia, y que la suma de los cuadrados de los segmentos, en los cales el punto de intersección divide a las cuerdas, es igual al cuadrado del diámetro.

390. Demostrar que si se divide la cuerda de una circunferencia en tres partes iguales y los extremos de la cuerda y los puntos de división se unen con el centro de la circunferencia, entonces, el ángulo central correspondiente se dividirá en tres partes, una de las cuales es mayor que las otras dos.

391. Demostrar que si de los extremos del diámetro de una circunferencia se trazan dos cuerdas que se cruzan, la suma de los productos de cada cuerda por su segmento desde el extremo del diámetro hasta el punto de intersección es una magnitud constante.

392. Desde cada uno de dos puntos de una recta se han trazado dos tangentes a una circunferencia. En los ángulos formados con sus vértices en estos puntos se han inscrito circunferencias de iguales radios. Demostrar que la línea de los centros de estas circunferencias es paralela a la recta dada.

393. Demostrar que si el diámetro de una semicircunferencia se divide en dos partes arbitrarias y a cada una de éstas se la circunscribe una semicircunferencia dentro de la semicircunferencia dada, entonces, el área encerrada entre las tres semicircunferencias será igual al área de la circunferencia cuyo diámetro es igual a la longitud de la perpendicular levantada dentro de la semicircunferencia dada desde el punto de división de su diámetro.

394. Demostrar que si dos puntos se encuentran fuera de una circunferencia y la recta que los une no corta a esta circunferencia, entonces la distancia entre estos dos puntos es mayor que la diferencia de las longitudes de las tangentes a la circunferencia, trazadas desde los puntos dados, y menor que su suma. Demostrar, además, que una de estas desigualdades no se cumplirá si la recta corta a la circunferencia.

395. A través del punto medio C de una cuerda arbitraria AB de una circunferencia, se han trazado dos cuerdas KL y MN (K y M se encuentran a un mismo lado de AB), Q es el punto de intersección de AB y KN, P es el punto de intersección de AB y ML. Demostrar que $QC = CP$.

396. Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro partes, y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demostrar que entre estos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.

397. Demostrar que para cualquier línea quebrada cerrada en el plano, cuyos segmentos no se cruzan entre sí, existe una circunferencia cuyo radio es igual a $\frac{1}{4}$ del perímetro de la línea quebrada y fuera de la cual no hay ningún punto de la quebrada.

398. ¿Puede ser regular un triángulo, las distancias desde los vértices del cual hasta dos rectas perpendiculares entre sí se expresan con números enteros?

399. En dos puntos A y B de una recta, por un mismo lado de ésta, se han levantado dos perpendiculares $AA_1 = a$ y $BB_1 = b$. Demostrar que conservando sin variación las magnitudes a y b, el punto de intersección de las rectas AB_1 y A_1B se encontrará a una misma distancia de la recta AB independientemente de la posición de los puntos A y B.

400. En el ángulo recto con el vértice A se ha inscrito una circunferencia; B y C son los puntos de contacto. Demostrar que si a dicha circunferencia se le traza una tangente que corte a los lados AB y AC en los puntos M y N, entonces, ella cortará en estos lados los segmentos MB y NC, la suma de las longitudes de los cuales es mayor que $\frac{1}{3}(AB+AC)$, y menor que $\frac{1}{2}(AB+AC)$.

401. Una circunferencia de radio igual a la altura de cierto triángulo isósceles, rueda por la base de este triángulo. Demostrar que la magnitud del arco cortado en esta circunferencia por los lados laterales del triángulo permanece constante. ¿Será justa esta proposición para un triángulo no isósceles?

402. Demostrar que las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son entre sí como la suma de los productos de los lados concurrentes en los extremos de las diagonales.

403. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias desde un punto cualquiera de una circunferencia hasta los vértices de un triángulo regular inscrito en esta circunferencia, es una magnitud constante, que no depende de la posición del punto en la circunferencia.

404. Demostrar que si una circunferencia tiene contacto interior con tres lados de un cuadrilátero y corta al cuarto lado, entonces, la suma de este último lado y el lado opuesto es mayor que la suma de los otros dos lados del cuadrilátero.

405. Demostrar que si una circunferencia tiene contacto interior con tres lados de un cuadrilátero, el cuarto lado del cual no corta a la circunferencia, la suma del cuarto lado y del opuesto es menor que la suma de los otros dos lados del cuadrilátero.

406. Se tienen dos semicircunferencias iguales que hacen contacto una con otra de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos a éstas una tangente común e inscribimos una circunferencia que haga contacto con esta tangente y las dos semicircunferencias dadas; luego, inscribimos una segunda circunferencia que haga contacto con la primera y las dos dadas, a continuación, trazamos una tercera circunferencia que haga contacto con la segunda y las dos dadas y así sucesivamente hasta lo infinito. Utilizando esta construcción, demostrar que, cuando n aumenta inconmensurablemente, la suma de los quebrados

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

tiende a la unidad, es decir, que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

407. En el punto A, que se encuentra a la distancia a del centro de una mesa redonda de billar de radio R, hay una bola elástica, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas. ¿A cuál punto B del borde del billar hay que dirigir la bola para que, después de rebotar dos veces del borde, vuelva al punto A?

408. De un punto A, dispuesto dentro de un ángulo con espejos como lados, sale un rayo de luz. Demostrar que el número de reflexiones que experimenta este rayo por parte de los lados del ángulo, siempre es finito. Hallar el número de reflexiones, si el ángulo dado es igual a α, y el rayo forma con uno de los lados un ángulo β. Aclarar las condiciones para las cuales este rayo pasa de nuevo por el punto A.

4. Lugar geométrico de los puntos

409. En una circunferencia se tienen dos puntos fijos A y B y un punto móvil M. En la prolongación del segmento AM fuera de la circunferencia se traza el segmento $MN = MB$. Hallar el lugar geométrico de los puntos N.

410. Se tienen dos rectas paralelas y un punto O entre ellas. A través de este punto se traza una secante arbitraria que corta a las rectas paralelas en los puntos A y A'. Hallar el lugar geométrico de los extremos de la perpendicular a la secante, levantada del punto A', cuya longitud es igual a OA.

411. Hallar el lugar geométrico de los puntos para los cuales la suma de las distancias hasta dos rectas dadas m y l es igual a la longitud a de un segmento dado. Examinar los casos de rectas que se cruzan y paralelas.

412. Hallar el lugar geométrico de los puntos, para los cuales la diferencia de las distancias hasta dos rectas dadas m y l es igual a un segmento de longitud dada. Examinar los casos de rectas que se cruzan y paralelas.

413. En un plano se tienen dos segmentos AB y CD. Hallar el lugar geométrico de los puntos M, que poseen la propiedad de que la suma de las áreas de los triángulos AMB y CMD es igual a cierta constante a^2.

414. Se tienen una circunferencia K y su cuerda AB. Se examinan todos los triángulos inscritos en esta circunferencia, cuya base es la cuerda dada. En cada triángulo se toma el punto de intersección de las alturas. Hallar el lugar geométrico de estos puntos.

415. Dentro de una circunferencia dada se ha fijado un punto A que no coincide con el centro. A través de este punto A se ha trazado una cuerda arbitraria y en sus extremos, tangentes a la circunferencia que se cruzan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

416. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M, las distancias desde los cuales hasta dos puntos dados A y B se encuentran en la relación

$$\frac{p}{q} \neq 1,$$

es una circunferencia con centro en la recta AB.

Expresar el diámetro de esta circunferencia por medio de la longitud a del segmento AB. Examinar también el caso en que

$$\frac{p}{q}=1.$$

417. Se tienen un segmento AB y un punto C sobre éste. Cada par de circunferencias, una de las cuales pasa por los puntos A y C, y la otra, por los puntos C y B, tiene, además de C, un punto común más D. Hallar el lugar geométrico de los puntos D.

418. Los lados de un polígono deformable permanecen respectivamente paralelos a las direcciones dadas, mientras que todos los vértices, excepto uno de ellos, se deslizan por las rectas dadas. Hallar el lugar geométrico de las posiciones del último vértice.

419. Se conocen una circunferencia K de radio r y su cuerda AB de longitud $2a$. Supongamos que sea CD una cuerda móvil de la misma circunferencia, de longitud constante $2b$. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas AC y BD.

420. A través de un punto P que se encuentra sobre una circunferencia dada y un punto Q perteneciente a una recta dada, se traza una circunferencia arbitraria que cruza por segunda vez la circunferencia dada en el punto R, y a la recta dada, en el punto S. Demostrar que todas las rectas RS, obtenidas como resultado de esta construcción, se cruzan en un punto perteneciente a la circunferencia dada.

5. Determinación de los valores máximos y mínimos

421. Se tienen dos rectas paralelas y un punto A entre ellas, que se encuentra a la distancia a de una de las rectas y a la distancia b de la otra. El punto A sirve de vértice de los ángulos rectos de unos triángulos rectángulos, los otros dos vértices de los cuales se encuentran en cada una de las rectas paralelas. ¿Cuál de los triángulos tiene menor área?

422. Se conoce un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos del cual es igual a α. Hallar la relación entre los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita y determinar para cuál valor de α esta relación será mínima.

423. De un rectángulo de lados a y b se ha cortado un triángulo, cuyos catetos son iguales a a_1 y b_1. ¿Cómo debe cortarse la parte restante para obtener un rectángulo de máxima área, cuyos lados sean paralelos a los lados del rectángulo dado?

424. Sobre uno de los lados de un ángulo agudo se han elegido dos puntos A y B. Hallar en el otro lado del ángulo un punto C

tal, que el ángulo ACB sea el máximo. Construir el punto C con ayuda de un compás y una regla.

425. Hallar en una recta dada l un punto tal, que la diferencia de las distancias desde esta recta hasta dos puntos conocidos A y B que se encuentran a un mismo lado de la recta, sea la menor, así como un punto tal, que esta diferencia sea la mayor.

426. A través de un punto A que se encuentra dentro de un ángulo, se ha trazado una recta que corta de este ángulo un triángulo de mínima área. Demostrar que el segmento de esta recta, comprendido entre los lados del ángulo, se divide en el punto A en dos mitades.

427. Demostrar que de todos los triángulos con un ángulo común φ del vértice y una suma de los lados laterales igual a $a - b$, el triángulo isósceles es el de menor base.

428. Entre todos los triángulos de igual base e igual ángulo del vértice, hallar el triángulo de mayor perímetro.

429. Sobre la base BC de un triángulo ABC (o sobre su prolongación) se ha tomado arbitrariamente un punto D y a los triángulos ACD y BCD se les han circunscrito circunferencias. Demostrar que la relación de los radios de estas circunferencias es una magnitud constante. Hallar la posición del punto D, para la cual la magnitud de estos radios sea mínima.

430. De un triángulo dado cortar dos circunferencias iguales de radio máximo.

B. ESTEREOMETRIA

Observaciones preliminares

Expongamos una serie de fórmulas para el cálculo de los volúmenes y las superficies de poliedros y cuerpos de rotación, suponiendo que V es el volumen del cuerpo, S_l la superficie lateral, S el área de su base y H la altura

Pirámide: $V=\frac{SH}{3}$.

Pirámide truncada: $V=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, donde S_1 y S_2 son las áreas de las bases superior e inferior de la pirámide.

Cono (circular recto): $V=\frac{\pi R^2H}{3}$,

donde R es el radio de la base del cono;

$$S_l=\pi Rl,$$

donde l es la generatriz.

Cilindro (circular recto): $V=\pi R^2H$,
donde R es el radio de la base;

$$S_l=2\pi RH.$$

Cono truncado: $V=\frac{\pi H}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$,
donde R_1 y R_2 son los radios de las bases del cono;

$$S_l=\pi(R_1+R_2)l,$$

donde l es la generatriz.

Esfera: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $\quad S=4\pi R^2$,
donde R es el radio de la esfera.

Sector esférico: $V=\frac{2\pi R^2h}{3}$,

donde R es el radio de la esfera y h la altura del segmento o capa esférica correspondiente.

Segmento esférico (casquete esférico): $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$,

$$S_l=2\pi Rh,$$

donde R es el radio de la esfera y h la altura del segmento.

1. Problemas de cálculo

431. El volumen de un prisma triangular regular es V, el ángulo entre las diagonales de dos de sus caras, trazadas desde un mismo vértice, es igual a α. Hallar el lado de la base del prisma.

432. Desde el vértice S de una pirámide regular cuadrangular se ha bajado a la base una perpendicular SB. Del punto medio O del segmento SB se han bajado las perpendiculares OM de longitud h a la arista lateral y OK de longitud b a la cara lateral. Hallar el volumen de la pirámide.

433. Hallar la superficie de una pirámide regular de n caras y de volumen V, si el radio de la circunferencia inscrita en su base es igual al radio de la circunferencia circunscrita a la sección paralela a la base y que se encuentra a una distancia h de ésta.

434. Una pirámide regular pentagonal $SABCDE$ ha sido cortada por un plano que pasa por los vértices A y C de la base y por los puntos medios de las aristas DS y ES. Hallar el área de la sección, si q es la longitud del lado de la base de la pirámide y b la longitud de la arista lateral.

435. Una pirámide regular triangular ha sido cortada por un plano que pasa por uno de los vértices de la base y por los puntos medios de dos de sus aristas laterales. Hallar la relación entre la superficie lateral de la pirámide y el área de su base, si se conoce que el plano secante es perpendicular a la cara lateral.

436. De un prisma regular cuadrangular se ha cortado, por un plano que pasa por la diagonal de la base inferior y uno de los vértices de la base superior, una pirámide cuya superficie total es S. Hallar la superficie total del prisma, si se conoce que el ángulo del vértice del triángulo, que se obtiene en la sección, es igual a α.

437. Calcular el volumen de una pirámide regular triangular si se sabe que el ángulo plano del vértice es igual a α y el radio de la circunferencia circunscrita a la cara lateral es igual a r.

438. Una pirámide regular cuadrangular con el lado de la base igual a a y el ángulo diedro de la base igual a 2α, se ha cortado por un plano que divide al ángulo diedro de la base por la mitad. Hallar el área de la sección.

439. Sobre el cielo raso de una sala de forma de un cuadrado de lado a, se ha construido un techo de la siguiente manera: cada par de vértices adyacentes del cuadrado, que forma el cielo raso de la sala, está unido por medio de rectas con el punto medio del lado opuesto; con cada uno de los cuatro triángulos obtenidos, tomados como base, se ha construido una pirámide, cuyo vértice se proyecta al punto medio del lado correspondiente del cuadrado. Las partes de las caras de estas cuatro pirámides, dispuestas por encima de las demás, forman el techo. Hallar el volumen del desván (es decir, el espacio entre el cielo raso y el techo), si la altura de cada pirámide es igual a h.

440. Hallar el ángulo diedro entre las caras laterales de una pirámide regular triangular, si el ángulo diedro formado por una de las caras laterales y la base es igual a α.

441. En una pirámide regular triangular $SABC$, el ángulo plano del vértice es igual a α, y la distancia más corta entre la arista lateral y el lado opuesto de la base es igual a d. Hallar el volumen de esta pirámide.

442. Una pirámide tiene por base un trapecio isósceles, cuyos lados paralelos son iguales a a y b ($a > b$), y los segmentos desiguales de las diagonales forman un ángulo φ. Hallar el volumen de la pirámide sabiendo que su altura trazada desde el vértice pasa por el punto de intersección de las diagonales de la base, y que los ángulos diedros contiguos a los lados paralelos de la base son entre sí como 2:1.

443. En el plano P se tiene el ángulo $BAC = 60°$. El punto S dista 25 cm del vértice del ángulo A, 7 cm del lado AB y 20 cm del lado AC. Hallar la distancia desde el punto S hasta el plano P.

444. En una pirámide hexagonal regular, cuyo ángulo plano en el vértice es igual a α, se ha trazado una sección que pasa por la diagonal mayor de la base y que forma con el ángulo diedro un ángulo β. Hallar la relación entre el área de la sección y el área de la base.

445. Los tres ángulos planos de un ángulo triedro son agudos. Uno de ellos es igual a α; los ángulos diedros adyacentes a este ángulo plano son iguales a β y γ respectivamente. Hallar los otros dos ángulos planos.

446. Calcular el volumen de una pirámide regular de altura h, si se sabe que esta pirámide tiene por base un polígono, la suma de los ángulos internos del cual es igual a $n\pi$, y la relación entre la superficie lateral y el área de la base es igual a k.

447. Se examina un cubo cuya arista es a. Por los extremos de cada tres aristas que parten del vértice común, se ha trazado un plano. Hallar el volumen del cuerpo limitado por estos planos.

448. Por el centro de la base de una pirámide hexagonal regular se ha hecho una sección paralelamente a la cara lateral. Hallar la relación entre el área de la sección y el área de la cara lateral.

449. Por cada una de las aristas de un tetraedro se ha trazado un plano paralelo a la arista opuesta. Hallar la relación entre el volumen del paralelepípedo obtenido y el volumen del tetraedro.

450. Sobre las caras de una pirámide cuadrangular regular, como bases, se han construido tetraedros regulares. Hallar la distancia entre los vértices externos de dos tetraedros adyacentes, si el lado de la base de la pirámide es igual a a.

451. A través de cierto punto de la diagonal de un cubo de arista a se ha trazado un plano perpendicular a esta diagonal.

1) Aclarar cuál es la figura que se obtiene en la sección de este plano con las caras del cubo.

2) Hallar las longitudes de los segmentos que se obtienen en la sección del plano con las caras del cubo, en función de la distancia x del plano secante al centro de simetría O del cubo.

452. Se examina la proyección de un cubo de arista a sobre un plano perpendicular a una de las diagonales del cubo. ¿Cuántas veces el área de la proyección será mayor que el área de la sección del cubo por un plano que pasa por el punto medio de la diagonal y que es perpendicular a esta última?

453. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular es igual a a, la altura de la pirámide es h. A través de uno de los lados de la base de la pirámide y el punto medio de la arista lateral que se cruza con dicho lado, se ha trazado una sección. Determinar la distancia desde el vértice de la pirámide hasta el plano de esta sección.

454. En un tetraedro regular $SABC$ cuya arista es igual a a se han trazado tres planos, cada uno de los cuales pasa por uno de los vértices de la base del tetraedro ABC y los puntos medios de dos aristas laterales. Hallar el volumen de la parte del tetraedro, dispuesta sobre todos los planos secantes.

455. La pirámide $SABCD$ tiene por base un rombo con las diagonales $AC=a$ y $BD=b$. La arista lateral SA es perpendicular al plano de la base e igual a q. Por el punto A y el punto medio K de la arista SC se ha trazado un plano perpendicular a la diagonal BD de la base. Determinar el área de la sección.

456. En un prisma cuadrangular regular se han trazado dos secciones paralelas: una de ellas pasa por los puntos medios de los lados contiguos de la base y por el punto medio del eje, la otra divide al eje en la relación de $1:3$. Conociendo que el área de la primera sección es igual a S, hallar el área de la segunda.

457. Una pirámide triangular ha sido seccionada por un plano en dos poliedros. Hallar la relación de los volúmenes de estos poliedros, si se conoce que el plano secante divide a tres aristas laterales, que concurren en uno de los vértices de la pirámide, en las proporciones $1:2$, $1:2$, $2:1$, contando desde el vértice.

458. Hallar el volumen de una pirámide triangular, si el área de sus caras son S_0, S_1, S_2, S_3, y los ángulos diedros, adyacentes a la cara de área S_0, son iguales entre sí.

459. Por los puntos medios de dos aristas paralelas de un cubo, que no se encuentran en una misma cara, se ha trazado una recta, alrededor de la cual el cubo ha sido girado 90°. Determinar el volumen de la parte común del cubo inicial y el girado, conociendo que la arista del cubo mide a.

460. A través del vértice de un cono se ha trazado un plano que forma con la base del cono un ángulo α. Este plano corta a la base por la cuerda AB de longitud a, que une los extremos del arco de la base del cono, correspondiente al ángulo central β. Hallar el volumen del cono.

461. Un cono y un cilindro tienen una base común, y el vértice del cono se encuentra en el centro de la otra base del cilindro. Hallar el valor del ángulo formado por el eje del cono y su generatriz, si se conoce que las superficies totales del cilindro y del cono son entre sí como 7:4.

462. En un cono se ha inscrito un cilindro cuya altura es igual al radio de la base del cono. Hallar el ángulo entre el eje del cono y su generatriz, si se sabe que la superficie total del cilindro es al área de la base del cono como 3:2.

463. En un cono cuya generatriz l forma con el plano de la base un ángulo α, se ha inscrito un prisma regular de n lados, todas las aristas del cual son iguales entre sí. Hallar la superficie total del prisma.

464. Los cuatro lados de un trapecio equilátero hacen contacto con un cilindro cuyo eje es perpendicular a los lados paralelos del trapecio. Hallar el ángulo formado por el plano del trapecio y el eje del cilindro, conociendo que las bases del trapecio miden a y b, y su altura es igual a h.

465. En un prisma recto que tiene por base un triángulo rectángulo se ha inscrito una esfera. En el triángulo de la base del prisma, la perpendicular de longitud h, bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa, forma con uno de los catetos un ángulo α. Hallar el volumen del prisma.

466. En una pirámide regular de n lados con el lado de la base igual a a y el arista lateral b se ha inscrito una esfera. Hallar el radio de esta esfera.

467. En una pirámide triangular regular se ha inscrito una esfera. Hallar el ángulo de inclinación de la cara lateral de la pirámide respecto al plano de la base, conociendo que la relación entre el volumen de la pirámide y el volumen de la esfera es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

468. A una esfera de radio r se le ha circunscrito una pirámide regular de n lados, el ángulo diedro de la base de la cual es igual a α. Hallar la relación entre el volumen de la esfera y el volumen de la pirámide.

469. Hallar la relación entre el volumen de una pirámide regular de n lados y el volumen de la esfera inscrita en esta pirámide, conociendo que las circunferencias circunscritas a la base y a las caras laterales de la pirámide son iguales entre sí.

470. Hallar la altura de una pirámide cuadrangular regular, si se conoce que el volumen de la esfera circunscrita a la pirámide es V, y que la perpendicular bajada del centro de la esfera a su cara lateral forma con la altura de la pirámide un ángulo α.

471. En una pirámide que tiene por base un rombo con un ángulo agudo igual a α, se ha inscrito una esfera de radio R. Las caras laterales de la pirámide forman con el plano de la base un ángulo φ. Hallar el volumen de la pirámide.

472. Dos pirámides regulares de n lados con iguales bases se han unido por estas bases. Hallar el radio de la esfera inscrita dentro del poliedro obtenido, conociendo que el lado de la base común de las pirámides es igual a a y las alturas de estas últimas son h y H.

473. Dos pirámides regulares de n lados con iguales bases, pero de diferentes alturas, han sido unidas por estas bases, y al poliedro obtenido se le ha circunscrito una esfera de radio R. Hallar las alturas de las pirámides, conociendo que el lado de la base es igual a a. ¿Para cuál relación entre a y R es soluble el problema?

474. En un prisma regular de n lados se ha inscrito una esfera que hace contacto con todas las caras del prisma. Al prisma se le ha circunscrito otra esfera. Hallar la relación entre los volúmenes de las dos esferas.

475. En una esfera se ha inscrito un tetraedro regular y en este tetraedro, una nueva esfera. Hallar la relación entre las superficies de las dos esferas.

476. En un tetraedro regular se ha inscrito una esfera. En la esfera se ha inscrito un nuevo tetraedro regular. Hallar la relación entre los volúmenes de los dos tetraedros.

477. Se tienen dos esferas concéntricas de radios r y R $(R > r)$. ¿Para cuál relación entre R y r, dentro de la esfera mayor se puede construir un tetraedro regular de modo que tres vértices de su base se encuentren en la esfera mayor y tres de sus caras laterales hagan contacto con la esfera menor?

478. Se han tomado dos vértices opuestos de un cubo y por los puntos medios de seis aristas que no pasan por estos vértices se ha trazado un plano secante que divide al cubo en dos partes. En cada una de estas partes se ha colocado una esfera que hace contacto con tres caras del cubo y el plano secante. ¿Cuántas veces el volumen de cada esfera será menor que el volumen del cubo?

479. Desde un punto de una esfera de radio R se han trazado tres cuerdas iguales que forman un ángulo α una con la otra. Determinar la longitud de estas cuerdas.

480. En una pirámide triangular $SABC$ las aristas SA, SC y SB son de dos en dos perpendiculares: $AB = BC = a$, $BS = b$. Hallar el radio de la esfera inscrita en la pirámide.

481. Hallar el ángulo diedro φ entre la base y la cara lateral de una pirámide cuadrangular regular, conociendo que el radio de la esfera circunscrita a la pirámide es tres veces mayor que el radio de la esfera inscrita en la misma.

482. En una esfera de radio R se ha inscrito un tetraedro regular, todas las caras del cual han sido prolongadas hasta su intersección con la esfera. Las líneas de intersección de las caras del tetraedro con la esfera cortan de su superficie cuatro triángulos esféricos y varias figuras esféricas biangulares. Hallar la superficie de cada una de estas figuras obtenidas.

483. En un cono se ha inscrito una esfera. La superficie de la esfera es a la superficie del cono como 4:3. Hallar el ángulo del vértice del cono.

484. En un cono se ha inscrito una semiesfera, el círculo mayor de la cual descansa sobre la base del cono. Determinar el ángulo del vértice del cono, conociendo que la superficie del cono y la superficie de la semiesfera son entre sí como 18:5.

485. En una esfera de radio R se ha inscrito un cono cuya superficie lateral es k veces mayor que el área de su base. Hallar el volumen del cono.

486. La razón entre la altura de un cono y el radio de la esfera circunscrita a éste es igual a q. Hallar la relación de los volúmenes de estos cuerpos.

¿Para cuáles valores de q es soluble el problema?

487. Hallar la razón del volumen de una esfera al volumen del cono recto circunscrito a esta esfera, si la superficie total del cono es n veces mayor que la superficie de la esfera.

488. Calcular los radios de las bases de un cono truncado circunscrito a una esfera de radio R, conociendo que la razón de la superficie total del cono truncado a la superficie de la esfera es igual a m.

489. En un cono se ha inscrito una esfera de radio r. Hallar el volumen del cono, conociendo que el plano que hace contacto con la esfera y que es perpendicular a una de las generatrices del cono se encuentra a la distancia d del vértice del cono.

490. En un cono, en el cual el ángulo de la sección axial del vértice es igual a α, se ha inscrito una esfera de radio R. Hallar el volumen de la parte del cono dispuesta por encima de la esfera

491. Determinar los radios de dos esferas, que al cruzarse forman un lente biconvexo, si se conoce que el espesor del lente es igual a $2a$, su superficie total es S y su diámetro $2R$.

492. En un cono se ha inscrito una esfera. La razón de los volúmenes de estas dos figuras es k. Hallar la relación entre los volúmenes de los segmentos esféricos cortados de la esfera por un plano que pasa por la línea de contacto de la esfera con el cono.

493. En una esfera S de radio R se han inscrito ocho esferas de menor radio, cada una de las cuales hace contacto con las dos vecinas, y todas juntas tienen contacto con la esfera S por la circunferencia de mayor diámetro. Luego, en el espacio entre las esferas se ha inscrito otra esfera S_1 que hace contacto con las ocho esferas de menor radio y con la esfera S. Hallar el radio ρ de esta última esfera.

494. En una esfera S de radio R se han inscrito ocho esferas iguales, cada una de las cuales hace contacto con tres esferas vecinas y la esfera S. Hallar el radio de las esferas inscritas, conociendo que sus centros se encuentran en los vértices de un cubo.

495. En una esfera se han inscrito dos conos iguales, cuyos ejes coinciden, y los vértices de los cuales se encuentran en los extremos opuestos del diámetro de la esfera. Hallar la relación entre el volumen de la parte común de estos dos conos y el volumen de la esfera, conociendo que la razón de la altura h del cono al radio R de la esfera es igual a k.

496. Las áreas de dos secciones paralelas de una esfera, dispuestas a un mismo lado respecto a su centro, son iguales a S_1 y S_2. La distancia entre estas secciones es igual a d. Hallar el área de la sección paralela a las secciones dadas y que divide por la mitad la distancia entre estas últimas.

497. Sobre un plano P descansan tres esferas iguales de radio R que hacen contacto una con otra. Un cono circular recto está dispuesto de tal manera que el plano de su base coincide con P, y las esferas dadas hacen contacto con el cono y se encuentran fuera de él. Hallar el radio de la base del cono si su altura es igual a qR.

498. Se tienen cuatro esferas iguales de radio R, cada una de las cuales hace contacto con las otras tres. Una quinta esfera tiene contacto exterior con cada una de las esferas dadas, y una sexta, contacto interior. Hallar la relación entre el volumen de la sexta esfera V_6 y el volumen de la quinta V_5.

499. En un plano se encuentran tres esferas iguales de radio R, cada una de las cuales hace contacto con otra de ellas. Una cuarta esfera hace contacto con cada una de las tres esferas dadas y con el plano. Hallar el radio de la cuarta esfera.

500. Sobre un plano reposan cuatro esferas iguales de radio R. Tres de ellas hacen contacto entre sí de dos en dos, y la cuarta tiene contacto con dos de estas tres. Sobre estas esferas se colocaron dos esferas iguales de menor diámetro que hacen contacto una con la otra y con tres de las esferas dadas. Hallar la relación entre los radios de las esferas grande y pequeña.

2. Problemas de demostración

501. Se tiene un cono truncado cuya superficie lateral es igual al área de un círculo que tiene por radio a la generatriz del cono truncado. Demostrar que en el cono dado se puede inscribir una esfera.

502. Se tiene un cono truncado cuya altura es media proporcional entre los diámetros de las bases. Demostrar que en el cono se puede inscribir una esfera.

503. Demostrar que al unir tres vértices de un tetraedro regular con el punto medio de la altura bajada desde el cuarto vértice, se obtienen tres rectas perpendiculares entre sí de dos en dos.

504. Sea R el radio de una esfera circunscrita a una pirámide cuadrangular regular y r, el radio de una esfera inscrita en esta pirámide. Demostrar que

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1.$$

Indicación. Expresar $\frac{R}{r}$ en función de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, donde α es el ángulo diedro entre la base y la cara lateral.

505. Desde el punto O de la base ABC de una pirámide triangular $SABC$, se han trazado las rectas OA', OB' y OC', paralelas respectivamente a las aristas SA, SB y SC, hasta su intersección con las caras SBC, SCA y SAB respectivamente en los puntos A', B' y C'.

Demostrar que

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1.$$

506. Se examinan dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ que se encuentran en planos no paralelos y cuyos lados son de dos en dos no paralelos. Al mismo tiempo, las rectas que unen los vértices correspondientes se intersecan en un punto O. Demostrar que las prolongaciones de los lados correspondientes de los triángulos se cruzan de dos en dos y que los puntos de su intersección se encuentran en una misma recta.

507. Demostrar que los segmentos que unen los vértices de cierta pirámide triangular con los centros de gravedad de las caras opuestas se cruzan en un punto y se dividen por este punto en la relación 1:3

508. Demostrar que el área de cualquier sección triangular de una pirámide triangular arbitraria no es mayor que el área de una de sus caras.

509. Una de las dos pirámides triangulares con base común. se encuentra dentro de la otra. Demostrar que la suma de los ángulos planos del vértice de la pirámide interior es mayor que la suma de los ángulos planos de la pirámide exterior.

510. Cuatro esferas cuyos centros no se encuentran en un plano, hacen contacto entre sí de dos en dos. Cada dos de estas esferas determinan un plano perpendicular a sus líneas de centros y que tiene contacto con ambas esferas. Demostrar que los seis planos que se obtienen de tal modo tienen un punto común.

511. Demostrar que si en una pirámide triangular la suma de las longitudes de cualquier par de aristas opuestas es la misma, los vértices de esta pirámide son los centros de cuatro esferas que hacen contacto entre sí de dos en dos.

512. ¿A cuál condición deberán satisfacer los radios de tres esferas que tienen contacto entre sí de dos en dos, para que a estas esferas se las pueda trazar un plano tangente común?

513. Demostrar que si un punto se desplaza por el plano de la base de una pirámide regular, permaneciendo dentro de esta base, la suma de las distancias de este punto hasta las caras laterales es constante.

514. Demostrar que dos planos trazados por los extremos de las tres aristas de un paralelepípedo, que parten de los extremos de la diagonal de este último, cortan a esta diagonal en tres partes iguales.

515. Demostrar que si un plano trazado por los extremos de tres aristas de un paralelepípedo, que parten de un mismo vértice, corta del paralelepípedo un tetraedro regular, entonces el paralelepípedo puede ser cortado por un plano de modo que en la sección se obtenga un hexágono regular.

516. Demostrar que todo plano que pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro, divide a éste en dos partes equidimensionales.

517. Demostrar que si todos los ángulos diedros de cierta pirámide triangular son iguales, entonces todas las aristas de esta pirámide son también iguales.

518. Sobre dos planos paralelos se encuentran los segmentos AB y CD. Los extremos de estos segmentos son los vértices de cierta pirámide triangular. Demostrar que el volumen de la pirámide no varía si estos segmentos se desplazan por estos planos paralelamente a sí mismo.

519. Demostrar que la recta que corta las dos caras de un ángulo diedro forma con ellas ángulos iguales solamente cuando los puntos de intersección equidistan de la arista.

520. En el espacio se examinan dos segmentos AB y CD que no se encuentran en un plano. Supongamos que sea MN el segmento que une sus puntos medios. Demostrar que

$$\frac{AD+BC}{2} > MN$$

(aquí AD, BC y MN son las longitudes de los segmentos correspondientes).

521. Demostrar que cualquier ángulo plano de un ángulo tetraedro arbitrario es menor que la suma de los otros tres ángulos planos.

522. Demostrar que cualquier ángulo tetraedro convexo puede ser cortado por un plano de manera tal, que en la sección se obtenga un paralelogramo.

523. Demostrar que si en una pirámide triangular todas las caras son equidimensionales, entonces éstas son iguales.

3. Lugar geométrico de los puntos

524. Hallar el lugar geométrico de las proyecciones de un punto dado en el espacio sobre un plano que pasa por otro punto dado.

525. Hallar el lugar geométrico de los centros de las secciones de una esfera por planos que pasan por una recta dada l. Examinar los casos en que la recta corta a la esfera, es tangente a ella o no tiene con ella puntos comunes.

526. Hallar el lugar geométrico de los centros de las secciones de una esfera por planos que pasan por un punto dado C. Examinar los casos en que el punto C se encuentra fuera de la esfera, en su superficie o dentro de ella.

527. Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar a la esfera dada de radio R, tres tangentes que formen con tres ángulos planos rectos un ángulo tetraédrico.

528. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto dado del espacio a las rectas que se encuentran en un plano dado y que se cruzan en un punto.

529. Se tienen un plano P y dos puntos A y B fuera de este plano. A través de A y B se trazan todas las esferas posibles que hagan contacto con el plano P. Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto.

530. Un plano corta al ángulo triédrico por el triángulo ABC. Hallar el lugar geométrico de los centros de gravedad de los triángulos ABC con la condición de que:

a) los vértices A y B son fijos;

b) el vértice A es fijo.

4. Valores máximos y mínimos

531. Un cubo se corta por un plano que pasa por una de sus diagonales. ¿Cómo deberá ser trazado este plano para que el área de la sección sea mínima?

532. En una pirámide triangular se hacen secciones paralelas a dos de sus aristas que no se cruzan. Hallar la sección de mayor área.

TRIGONOMETRIA

Observaciones preliminares

Expongamos algunas de las fórmulas que se encuentran en los problemas propuestos a continuación.

1. Funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y, \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x \cos y-\cos x \operatorname{sen} y, \tag{2}$$

$$\cos(x+y)=\cos x \cos y-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \tag{3}$$

$$\cos(x-y)=\cos x \cos y+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \tag{4}$$

2. Angulos doble y triple:

$$\operatorname{sen} 2x=2 \operatorname{sen} x \cos x, \tag{5}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x, \tag{6}$$

$$\operatorname{sen} 3x=3 \operatorname{sen} x-4 \operatorname{sen}^3 x, \tag{7}$$

$$\cos 3x=4 \cos^3 x-3 \cos x. \tag{8}$$

3. Suma y diferencia de funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}, \tag{10}$$

$$\cos x+\cos y=2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \tag{11}$$

$$\cos x-\cos y=2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}. \tag{12}$$

4. Multiplicación de funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)], \tag{13}$$

$$\cos x \cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)], \tag{14}$$

$$\operatorname{sen} x \cos y=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)], \tag{15}$$

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{16}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{17}$$

5. Expresión de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{18}$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{19}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \tag{20}$$

6. Funciones trigonométricas inversas.

a) Valores principales de las funciones trigonométricas inversas:

$$y=\operatorname{arcsen} x, \quad \text{si} \quad x=\operatorname{sen} y \ \text{ y } \ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

$$y=\arccos x, \quad \text{si} \quad x=\cos y \ \text{ y } \ 0\leqslant y\leqslant\pi, \tag{22}$$

$$y=\operatorname{arctg} x, \quad \text{si} \quad x=\operatorname{tg} y \ \text{ y } \ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

$$y=\operatorname{arccotg} x, \ \text{si}\ x=\operatorname{cotg} y \ \text{ y } \ 0<y<\pi \tag{24}$$

b) Funciones trigonométricas inversas de valuación múltiple:

$$\operatorname{Arcsen} x=(-1)^n \operatorname{arcsen} x+\pi n, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{25}$$

$$\operatorname{Arccos} x=\pm \arccos x-2\pi n, \tag{26}$$

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+\pi n, \tag{27}$$

$$\operatorname{Arccotg} x=\operatorname{arccotg} x+\pi n. \tag{28}$$

Las fórmulas (25)—(28) determinan el aspecto general de los ángulos correspondientes al valor dado de la función trigonométrica

1. Transformación de las expresiones que contienen funciones trigonométricas

533. Demostrar la identidad

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x.$$

534. Demostrar la identidad

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}^2\beta.$$

535. Demostrar que para todos los valores admisibles de x es válida la fórmula

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x.$$

536. Demostrar que para todos los valores admisibles de x es justa la igualdad

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

537. Demostrar la identidad

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma) = 4 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta+\gamma}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

538. Demostrar que si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

539. Demostrar que para un valor entero de n y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ se cumple la identidad

$$\operatorname{sen} 2n\alpha + \operatorname{sen} 2n\beta + \operatorname{sen} 2n\gamma = (-1)^{n+1}\, 4 \operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} n\beta \operatorname{sen} n\gamma.$$

540. Demostrar que si $\cos(\alpha + \beta) = 0$, entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\beta) = \operatorname{sen} \alpha.$$

541. Demostrar que si $3 \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(2\alpha + \beta)$, entonces

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

para todos los valores admisibles de α y β.

542. Demostrar que si $\operatorname{sen} \alpha = A \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta - A}$$

para todos los valores admisibles de α y β.

543. Demostrar que si los ángulos α y β están enlazados en la relación

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(2\alpha + \beta)} = \frac{n}{m} \qquad (|m| > |n|),$$

entonces se cumple la igualdad

$$\frac{1 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}{m + n} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{m - n}.$$

544. Demostrar que si $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \neq 0$, entonces es válida la fórmula

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z\,(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x).$$

545. Demostrar que si α, β, γ son los ángulos de un triángulo, entonces se cumple la igualdad

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

546. Sea $x+y+z=\frac{\pi}{2}k$. ¿Para cuáles valores enteros de k la suma

$$\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z+\operatorname{tg}\quad\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y$$

no dependerá de x, y y z?

547. Hallar las relaciones algebraicas entre los ángulos α, β y γ, si se conoce que

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

548. Transformar en una multiplicación la expresión

$$\operatorname{cotg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x-8\cos 4x\operatorname{cotg} 4x.$$

549. Transformar en una multiplicación la expresión

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2.$$

550. Calcular, sin emplear las tablas, la expresión

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}10^\circ}-2\operatorname{sen}70^\circ.$$

551. Demostrar que

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

552. Demostrar que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

553. Calcular, sin hacer uso de las tablas, la expresión

$$\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{5\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{7\pi}{16}.$$

554. Demostrar que

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}.$$

2. Ecuaciones trigonométricas y sistemas de ecuaciones

A. ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

555. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^3 x\cos x-\operatorname{sen} x\cos^3 x=\frac{1}{4}.$$

556. Resolver la ecuación

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=1+\operatorname{sen} 2x.$$

557. Resolver la ecuación

$$1+\operatorname{sen} x+\cos x+\operatorname{sen} 2x+\cos 2x=0.$$

558. Resolver la ecuación

$$1+\operatorname{sen} x+\cos 3x=\cos x+\operatorname{sen} 2x+\cos 2x.$$

559. Resolver la ecuación

$$(\operatorname{sen} 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right).$$

560. Resolver la ecuación

$$2\operatorname{sen} 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\operatorname{sen} 5x=0.$$

561. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x\,(\operatorname{tg} x+1)=3\operatorname{sen} x\,(\cos x-\operatorname{sen} x)+3.$$

562. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

563. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}-\frac{1}{\sec^2 x}-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}=-3.$$

564. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}.$$

565. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x)=\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x.$$

566. Resolver la ecuación

$$(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha)=(1+k\cos 2x)\cos(x-\alpha).$$

567. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx=\operatorname{sen} cx\operatorname{sen} dx,$$

donde a, b, c y d son los términos positivos sucesivos de una progresión aritmética.

568. Resolver la ecuación
$$2+\cos x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

569. Resolver la ecuación
$$\operatorname{cotg} x-2\operatorname{sen} 2x=1.$$

570. Hallar $\operatorname{tg} x$ de la ecuación
$$2\cos x\cos(\beta-x)=\cos\beta.$$

571. Hallar $\cos\varphi$, si
$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)+\operatorname{sen}(2\varphi+\alpha)=\operatorname{sen}(\varphi+\alpha)+\operatorname{sen}(2\varphi-\alpha)$$
y el ángulo φ se encuentra en el tercer cuadrante.

572. Hallar $\operatorname{cotg} x$ de la ecuación
$$\cos^2(\alpha+x)+\cos^2(\alpha-x)=a,$$
donde $0<a<2$. Analizar para cuáles valores de α tiene solución el problema.

573. Hallar el valor de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, si $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ y el ángulo α se encuentra en los límites entre 0 y 45°.

574. Resolver la ecuación
$$\operatorname{sen} 2x-12(\operatorname{sen} x-\cos x)+12=0.$$

575. Resolver la ecuación
$$1+2\operatorname{cosec} x=-\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}.$$

576. Resolver la ecuación
$$\operatorname{cotg}^2 x=\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

577 Resolver la ecuación
$$2\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x.$$

578. Resolver la ecuación
$$2\operatorname{cotg} 2x-3\operatorname{cotg} 3x=\operatorname{tg} 2x.$$

579. Resolver la ecuación
$$6\operatorname{tg} x+5\operatorname{cotg} 3x=\operatorname{tg} 2x.$$

580. Resolver la ecuación
$$\operatorname{sen}^5 x-\cos^5 x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

581. Resolver la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}.$$

582. ¿Para cuáles valores de a tiene solución la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}x\cos x-2\cos^2 x=a?$$

Hallar esta solución.

583. Hallar todos los valores de a, para los cuales es soluble la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 x-2\cos^2 x+a^2=0.$$

Hallar estas soluciones.

584. Resolver la ecuación

$$\cos\pi\frac{x}{31}\cos 2\pi\frac{x}{31}\cos 4\pi\frac{x}{31}\cos 8\pi\frac{x}{31}\cos 16\pi\frac{x}{31}=\frac{1}{32}.$$

585. Resolver la ecuación

$$\cos 7x-\operatorname{sen}5x=\sqrt{3}\,(\cos 5x-\operatorname{sen}7x).$$

586. Resolver la ecuación

$$2-(7+\operatorname{sen}2x)\operatorname{sen}^2 x+(7+\operatorname{sen}2x)\operatorname{sen}^4 x=0.$$

587. Hallar $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$, si

$$a\cos x+b\operatorname{sen}x=c.$$

¿Para cuál condición respecto a a, b y c es soluble el problema?

588. Resolver la ecuación

$$\frac{a\operatorname{sen}x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\operatorname{sen}x+a}\cdot(a^2\neq 2b^2).$$

589. Resolver la ecuación

$$32\cos^6 x-\cos 6x=1.$$

590. Resolver la ecuación

$$8\operatorname{sen}^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1=0.$$

491. Resolver la ecuación

$$\cos 3x\cos^3 x+\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}^3 x=0.$$

592. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}.$$

593. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^{10} x+\cos^{10} x=\frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

594. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^3 2x+\operatorname{sen}^3 3x=(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x)^3.$$

595. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^{2n} x+\cos^{2n} x=1,$$

donde n es un número entero positivo.

596. Resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right).$$

597. Resolver la ecuación

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\operatorname{sen} 3x+5.$$

598. Resolver la ecuación

$$(\operatorname{sen} x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x.$$

599. Demostrar que la ecuación

$$(\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x)\operatorname{sen} 4x=2$$

no tiene solución.

600. Determinar en qué límites se puede variar el parámetro λ, para que la ecuación

$$\sec x+\operatorname{cosec} x=\lambda$$

tenga una raíz x que satisfaga a la desigualdad $0<x<\frac{\pi}{2}$.

B. SISTEMAS TRIGONOMETRICOS

601. Hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(x+y)=0,\\ \operatorname{sen}(x-y)=0,\end{array}\right\}$$

que satisfagan las condiciones: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

602. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x=\operatorname{cosec} x+\operatorname{sen} y,\\ \cos x=\sec x+\cos y.\end{array}\right\}$$

603. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{array}\right\}$$

604. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right\}$$

605. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{array}\right\}$$

606. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y = \varphi, \\ \cos x \cos y = a. \end{array}\right\}$$

¿Para cuáles valores de a es soluble el sistema?

607. Hallar todos los valores de a, para los cuales es soluble el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \operatorname{sen} 2y = a. \end{array}\right\}$$

Resolver este sistema.

608. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \cos (x - 2y) = a \cos^3 y, \\ \operatorname{sen} (x - 2y) = a \cos^3 y. \end{array}\right\}$$

¿Para cuáles valores de a es soluble el sistema?

609. Hallar $\cos (x + y)$, si x e y satisfacen al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a, \\ \cos x + \cos y = b \end{array}\right\}$$

y $a^2 + b^2 \neq 0$.

610. ¿Para cuáles valores de α es soluble el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x - y = \alpha, \\ 2 (\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4 \cos^2 (x - y)? \end{array}\right\}$$

Hallar las soluciones de este sistema.

611. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0,\\ x+y=\alpha. \end{aligned}\right\}$$

¿Para cuáles valores de α son posibles las soluciones halladas?

612. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}=2\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right),\\ \operatorname{tg} y+\frac{1}{\operatorname{tg} y}=2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}\right\}$$

613. Eliminar x e y del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a\operatorname{sen}^2 x+b\cos^2 x=1,\\ a\cos^2 y+b\operatorname{sen}^2 y=1,\\ a\operatorname{tg} x=b\operatorname{tg} y, \end{aligned}\right\}$$

admitiendo que el sistema es soluble y que $a\neq b$.

614. Expresar $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ en función de A y B con la condición de que

$$\operatorname{sen}\alpha=A\operatorname{sen}\beta,\quad \operatorname{tg}\alpha=B\operatorname{tg}\beta.$$

615. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y,\\ \operatorname{sen} x=\cos 2y. \end{aligned}\right\}$$

616. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\operatorname{sen}(x+y),$$
$$|x|+|y|=1.$$

617. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(y-3x)=2\operatorname{sen}^3 x,\\ \cos(y-3x)=2\cos^3 x. \end{aligned}\right\}$$

618. Aclarar a cuáles condiciones deberán satisfacer los números a, b y c, para que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2a,\\ \cos x+\cos y=2b,\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=c \end{aligned}\right\}$$

tenga por lo menos una solución.

3. Funciones trigonométricas inversas

619. Calcular el $\arccos\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$.

620. Calcular el $\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)$.

621. Demostrar que

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

622. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

623. Demostrar que para $\alpha<1/32$, la ecuación

$$(\operatorname{arcsen} x)^3+(\arccos x)^3=\alpha\pi^3$$

no tiene raíces.

624. Demostrar la fórmula

$$\arccos x=\begin{cases}\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \pi-\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

625. Demostrar las fórmulas

$$\operatorname{arcsen}(-x)=-\operatorname{arcsen} x,\quad \arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

626. Demostrar que si $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, entonces $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)=x-2k\pi$.

627. Demostrar que si $0<x<1$ y

$$\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x},\quad \beta=\operatorname{arcsen}\frac{1-x^2}{1+x^2},\ \text{entonces } \alpha+\beta=\pi.$$

628. Hallar la relación entre

$$\operatorname{arcsen}\cos\operatorname{arcsen} x \ \text{ y } \ \arccos\operatorname{sen}\arccos x.$$

4. Desigualdades trigonométricas

629. Resolver la desigualdad $\operatorname{sen} x>\cos^2 x$.

630. ¿Para cuáles valores de x se cumple la desigualdad

$$4\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{tg} x-2\sec^2 x>0?$$

631. Resolver la desigualdad $\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x<\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 4x$, si $0<x<\pi/2$.

632. Resolver la desigualdad

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x-\frac{1}{4}}{\sqrt{3}-(\operatorname{sen} x+\cos x)}>0.$$

633. Hallar todos los valores de x, mayores de cero, pero menores de 2π, para los cuales se cumple la desigualdad

$$\cos x-\operatorname{sen} x-\cos 2x>0.$$

634. Resolver la desigualdad

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+2}.$$

635. Resolver la desigualdad

$$\cos^3 x\cos 3x-\operatorname{sen}^3 x\operatorname{sen} 3x>\frac{5}{8}.$$

636. Demostrar para $0<\varphi<\pi/2$ la desigualdad

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}>1+\operatorname{cotg}\varphi.$$

637 Demostrar la validez de la desigualdad

$$(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x)>0$$

para todos los valores de x, para los cuales la parte izquierda tiene sentido

638. Demostrar la validez de la desigualdad

$$(\operatorname{cotg}^2 x-1)(3\operatorname{cotg}^2 x-1)(\operatorname{cotg} 3x\operatorname{tg} 2x-1)\leqslant -1$$

para todos los valores de x, para los cuales la parte izquierda tiene sentido.

639. Suponiendo que sea $\operatorname{tg}\theta=n\operatorname{tg}\varphi$ $(n>0)$, demostrar que

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)\leqslant\frac{(n-1)^2}{4n}.$$

640. Demostrar la desigualdad

$$\frac{\operatorname{sen} x-1}{\operatorname{sen} x-2}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{2-\operatorname{sen} x}{3-\operatorname{sen} x}.$$

¿Para cuáles valores de x esta desigualdad se transforma en igualdad?

641. Demostrar que para $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ se cumple la desigualdad

$$\cos\operatorname{sen}\varphi>\operatorname{sen}\cos\varphi.$$

642. Supongamos que sea n un número entero positivo, mayor que 1, y que el ángulo α satisface a la desigualdad

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}.$$

Demostrar, empleando el método de inducción completa, que entonces

$$\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha.$$

643. Supongamos que sea $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$. Demostrar que entonces

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \ldots + \operatorname{sen} \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

644. Demostrar que si A, B y C son los ángulos de un triángulo, entonces

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

645. Demostrar que para $0 < x < \pi/4$ es justa la desigualdad

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x (\cos x - \operatorname{sen} x)} > 8.$$

5. Problemas diferentes

646. Calcular la función $\operatorname{sen} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}\right)$.

647. Demostrar que si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ y $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, entonces $\alpha + 2\beta = 45°$ (α y β son ángulos del primer cuadrante).

648. Demostrar que

$$y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$$

adquiere valores positivos para todos los valores admisibles de x.

649. Demostrar que la igualdad

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 3\alpha = \frac{4}{5}$$

no es válida para ninguno de los valores de α.

650. Expresar $\operatorname{sen} 5x$ en función de $\operatorname{sen} x$, y con ayuda de la fórmula obtenida calcular, sin hacer uso de las tablas, el valor de $\operatorname{sen} 36°$.

651. Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$\varphi(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x.$$

652. Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$y = 2\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x + 6\operatorname{sen} x\cos x.$$

653 ¿Para cuáles valores enteros de n la función

$$\cos nx \operatorname{sen}\frac{5}{n}x$$

tiene un período igual a 3π *)?

654. Demostrar que si la suma

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x)$$

para $x=0$ y $x=x_1\neq k\pi$ (k es un número entero) se convierte en cero, entonces esta suma es igual a cero para cualquier valor de x.

655. Demostrar que la función $\cos\sqrt{x}$ no es periódica (es decir, que no existe ningún número constante $T\neq 0$, que para todos los valores de x sea $\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$).

656. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\ldots+\operatorname{sen} nx=\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Indicación. Se puede emplear la fórmula de Moivre

$$(\cos x+i\operatorname{sen} x)^n=\cos nx+i\operatorname{sen} nx.$$

657. Calcular la suma

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{2^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{2^n}.$$

Indicación. Emplear la fórmula de Moivre.

658. Se examina la función

$$f(x)=A\cos x+B\operatorname{sen} x,$$

donde A y B son ciertas constantes.

Demostrar que si $f(x)$ se hace igual a cero para dos valores del argumento x_1 y x_2 tales, que

$$x_1-x_2\neq k\pi$$

(k es un número entero), entonces $f(x)$ es por identidad igual a cero.

---

*) La función $f(x)$ se llama periódica, si existe un número $T\neq 0$ tal, que para todos los valores admisibles de x se cumple la igualdad $f(x+T)=f(x)$. En este caso, el número T se llama período de la función.

RESOLUCIONES Y SOLUCIONES | ALGEBRA

1. Progresiones aritmética y geométrica

1. Segun la condición del problema

$$b-a=c-b=d \quad \text{y} \quad c-a=2d.$$

Supongamos que sea

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

y

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Demostremos que $A_1=A_2$. Si $d=0$, entonces $a=b=c$ y $A_1=A_2=0$. Por esta razón consideraremos que $d\neq 0$. Liberándonos de la irracionalidad en los denominadores obtenemos:

$$A_1=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}=\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}$$

y

$$A_2=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}-\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}=\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}.$$

Así pues, $A_1=A_2$, lo que se exigía demostrar.

2. Si la diferencia d de la progresión dada es igual a cero, la validez de la fórmula es evidente. Por esta razón consideraremos que $d\neq 0$.

Designemos el miembro izquierdo de la igualdad supuesta por S. Liberando los denominadores de la irracionalidad, obtendremos:

$$S=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}.$$

Puesto que según la condición del problema $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=d$, entonces, es evidente que

$$S=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

Finalmente tendremos

$$S=\frac{a_n-a_1}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})d}=\frac{(n-1)\,d}{d\,(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}},$$

lo que se exigía demostrar.

3. Según la condición del problema

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=d.$$

Si $d=0$, entonces la igualdad propuesta es evidente. Considerando que $d \neq 0$, tendremos:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=$$
$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\cdot\frac{1}{d}+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)\cdot\frac{1}{d}=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=$$
$$=\frac{a_n-a_1}{da_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

lo que se exigía demostrar.

4. Siendo $n=3$ tenemos que $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}$. De aquí que $\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_1a_3}=$ $=\frac{1}{a_1a_3}-\frac{1}{a_1a_2}$ y por consiguiente, $a_3-a_2=a_2-a_1$. Por esta razón, es suficiente demostrar que para cualquier $n\geqslant 4$

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Escribamos sucesivamente la igualdad indicada en la condición del problema, para los casos $n-2$, $n-1$ y n:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}. \tag{3}$$

Restando miembro a miembro de la igualdad (3) la igualdad (2) y de la (2) la igualdad (1), obtenemos.

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_1a_n}=(n-2)\cdot\frac{a_{n-1}-a_n}{a_1a_{n-1}a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_1a_{n-2}}=(n-2)\cdot\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n-2}}.$$

Reduciendo a un común denominador y haciendo las simplificaciones correspondientes, tendremos:

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\cdot(a_{n-1}-a_n),$$
$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\cdot(a_{n-2}-a_{n-1}).$$

Por consiguiente, $a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$, lo que se exigía demostrar.

5. Llevaremos a cabo la demostración por el método de inducción. Señalemos que para $n=2$ la igualdad tiene lugar, puesto que $a_2-a_1=a_3-a_2$ y por consiguiente, $a_1-2a_2+a_3=0$. Supongamos que la fórmula propuesta es válida para cierto valor de n; con otras palabras, cualquiera que sea la progresión aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, será válida la igualdad

$$x_1-\binom{n}{1}x_2+\binom{n}{2}x_3+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}x_n+(-1)^n\binom{n}{n}x_{n+1}=0. \tag{1}$$

Pasando a $n+1$, hacemos uso de la identidad

$$C_k(n)=C_k(n-1)+C_{k-1}(n-1).$$

Entonces,

$$a_1+\binom{n+1}{1}a_2+\binom{n+1}{2}a_3+\ldots+(-1)^n\binom{n+1}{n}a_{n+1}+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}a_{n+2}=$$
$$=\left[a_1-\binom{n}{1}a_2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}\right]-$$
$$-\left[a_2-\binom{n}{1}a_3+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_{n+1}+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+2}\right].$$

Por suposición de la inducción, ambas expresiones que se encuentran entre corchetes son iguales a cero, puesto que tienen la forma (1). Por esta razón, la fórmula propuesta es válida también para $n+1$. Con esto la afirmación queda demostrada.

6. Realizaremos la demostración por el método de inducción. Siendo $n=3$, es fácil comprobar directamente que

$$a_1^2-3(a_1+d)^2+3(a_1+2d)^2-(a_1+3d)^2=0.$$

Supongamos que se haya establecido que para cierto valor de n y una progresión aritmética arbitraria $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tiene lugar la identidad

$$x_1^2-\binom{n}{1}x_2^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x_{n+1}^2=0.$$

Entonces, procediendo en el caso de $n+1$ como en el problema anterior, obtendremos:

$$a_1^2-\binom{n+1}{1}a_2^2+\binom{n+1}{2}a_3^2+\ldots+(-1)^n\binom{n+1}{n}a_{n+1}^2+$$
$$+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}a_{n+2}^2=\left[a_1^2-\binom{n}{1}a_2^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}^2\right]-$$
$$-\left[a_2^2-\binom{n}{1}a_3^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+2}^2\right]=0,$$

lo que se necesita para la demostración.

Señalemos que para la progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, es justa también una fórmula más común

$$a_1^k-\binom{n}{1}a_2^k+\binom{n}{2}a_3^k-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n^k+(-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1}^k=0,$$

donde $k\geqslant 1$ es un número entero.

7. Por la propiedad de los términos de una progresión aritmética tenemos:

$$2\,{}^m\!\log x={}^n\!\log x+{}^k\!\log x.$$

De aquí (véase la fórmula (3), pág. 27)

$$\frac{2}{{}^x\!\log m}=\frac{1}{{}^x\!\log n}+\frac{1}{{}^x\!\log k}$$

y, por consiguiente,

$$2=\frac{{}^x\!\log m}{{}^x\!\log n}+\frac{{}^x\!\log m}{{}^x\!\log k}.$$

Utilizando la fórmula (2) expuesta en la pág. 27, obtenemos:

$$2={}^n\!\log m+{}^k\!\log m.$$

Escribamos esta igualdad de la siguiente manera:

$${}^n\!\log n^2={}^n\!\log m+{}^n\!\log\left(n^{{}^k\!\log m}\right).$$

Por potenciación, obtendremos que

$$n^2=mn^{{}^k\!\log m},$$

o bien

$$n^2 = (kn)^{2\log_{kn} n},$$

con lo cual el problema queda demostrado.

8. Supongamos que sea

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+kn}} = c. \tag{1}$$

Designemos la razón aritmética por d. Representa interés sólo el caso en que $d \neq 0$, puesto que siendo $d = 0$ todos los términos de la progresión son iguales entre sí y se cumple la igualdad (1). Utilizando la fórmula para la suma de los términos de una progresión aritmética, de la fórmula (1) obtenemos:

$$\frac{n}{2}[a_1 + a_1 + d(n-1)] = \frac{kn}{2}[a_1 + nd + a_1 + (n + kn - 1)d]c,$$

de donde, después de la simplificación y agrupación de los términos, hallamos:

$$(2a_1 - 2a_1kc - d + cdk) + n(d - cdk^2 - 2cdk) = 0.$$

Puesto que esta igualdad tiene lugar para cualquier valor de n, entonces

$$2a_1 - 2a_1kc - d + cdk = 0,$$
$$d - cdk^2 - 2cdk = 0.$$

Dividiendo la segunda de estas dos igualdades por $d \neq 0$, tendremos:

$$c = \frac{1}{k(k+2)}. \tag{2}$$

La primera de estas igualdades se puede escribir en la forma

$$(2a_1 - d)(1 - ck) = 0.$$

En virtud de (2), el segundo factor se diferencia de cero y, por consiguiente, $d = 2a_1$.

Así pues, en el caso en que $d \neq 0$, la igualdad (1) puede tener lugar para todos los valores de n solamente cuando se tiene la progresión

$$a,\ 3a,\ 5a,\ \ldots\ (a \neq 0). \tag{3}$$

Ahora es fácil comprobar directamente que la progresión (3) satisface en realidad la condición del problema. Así pues, la progresión buscada es la (3).

9. Supongamos que sea d la razón aritmética. Tenemos:

$$b^2 = x_1^2 + (x_1 + d)^2 + \ldots + [x_1 + (n-1)d]^2 = nx_1^2 + 2x_1d[1 + 2 + \ldots + (n-1)] +$$
$$+ d^2[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = nx_1^2 + n(n-1)x_1d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2$$

y además,

$$a = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Eliminando de estas ecuaciones x_1, después de simples transformaciones obtenemos:

$$d^2\frac{n(n^2-1)}{12} = b^2 - \frac{a^2}{n}.$$

De aquí

$$d = \pm\sqrt{\frac{12(nb^2 - a^2)}{n^2(n^2-1)}};$$

a continuación x_1 se determina en ambos casos por la fórmula

$$x_1=\frac{1}{n}\left[a-\frac{n(n-1)}{2}d\right].$$

Así pues, siendo $n^2b^2-a^2\neq 0$, a las condiciones planteadas satisfacen dos progresiones.

10. Supongamos que la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ posee tal propiedad que

$$a_2-a_1=d, \quad a_3-a_2=2d, \quad \ldots, \ a_n-a_{n-1}=(n-1)d.$$

Sumando estas igualdades hallaremos que

$$a_n=a_1+d\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

Haciendo uso de esta fórmula, obtenemos.

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1n+\left[\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\right]d.$$

En el problema 266 se demuestra que

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Por consiguiente,

$$S_n=a_1n+\frac{n(n^2-1)}{6}d.$$

Para el problema en cuestión $d=3$, $a_1=1$. Por esta razón

$$a_n=1+\frac{3}{2}n(n-1) \text{ y } S_n=\frac{1}{2}n(n^2+1).$$

11. En la enésima columna horizontal se encuentran los números n, $n+1$, $\ldots$, $3n-3$, $3n-2$ (en total hay $2n-1$ números). La suma de estos números es igual a

$$\frac{(n+3n-2)(2n-1)}{2}=(2n-1)^2.$$

12. Supongamos que sea q el denominador de la progresión; entonces

$$a_{m+n}=a_1q^{m+n-1}=A,$$
$$a_{m-n}=a_1q^{m-n-1}=B.$$

De aquí $q^{2n}=\frac{A}{B}$ y, por consiguiente, $q=\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Ahora tenemos:

$$a_m=a_{m-n}q^n=B\left(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}\right)^n=\sqrt{AB},$$

$$a_n=a_{m+n}q^{-m}=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}=A^{\frac{2n-m}{2n}}B^{\frac{m}{2n}}.$$

13. Tenemos

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1},$$
$$S_{2n}-S_n=a_1q^n+a_1q^{n+1}+\ldots+a_1q^{2n-1}=q^nS_n$$

y

$$S_{3n}-S_{2n}=a_1q^{2n}+a_1q^{2n+1}+\ldots+a_1q^{3n-1}=q^{2n}S_n.$$

De aquí

$$\frac{1}{q^n}=\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}},$$

lo que se exigía demostrar.

14. Tenemos:

$$P_n=a_1\cdot a_1q_1\cdot\ldots\cdot a_1q^{n-1}=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(a_1q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n.$$

Señalando que

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$\tilde{S}_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q}+\ldots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}=\frac{1}{a_1}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{a_1q^{n-1}}\frac{q^n-1}{q-1}$$

y por consiguiente,

$$\frac{S_n}{\tilde{S}_n}=a_1^2q^{n-1}=\left(a_1q^{\frac{n-1}{2}}\right)^2,$$

obtenemos

$$P_n=\left(\frac{S_n}{\tilde{S}_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

15. Designemos la suma que se examina por S_n. Multipliquemos cada sumando de esta suma por x y restemos de S_n la magnitud obtenida; como resultado tendremos:

$$S_n-xS_n=1+x+x^2+\ldots+x^n-(n+1)x^{n+1}.$$

Sumando la progresión geométrica que aquí entra, para $x\neq 1$ hallaremos:

$$(1-x)S_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}.$$

De aquí

$$S_n=\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}\qquad (x\neq 1).$$

Cuando $x=1$ tenemos:

$$S_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

16. Designemos la suma buscada por S_n. Transformemos los sumandos de esta suma empleando la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica

$$1+10=\frac{10^2-1}{9},$$

$$1+10+100=\frac{10^3-1}{9},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1+10+100+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

Puesto que, además, $1=\frac{10-1}{9}$, sumando los segundos miembros de las igualdades, tendremos

$$S_n=\frac{1}{9}(10+10^2+\ldots+10^n-n)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$$

17. La suma buscada puede ser representada en la forma siguiente

$$\begin{aligned}&(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n)+\\&+(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1})+\\&+(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2})+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+(x+x^2)+\\&+x,\end{aligned}$$

de lo cual es fácil convencerse sumando las columnas verticales. Al sumar las columnas horizontales, hallamos que para $x\neq 1$, la suma buscada es igual a

$$x\frac{x^n-1}{x-1}+x\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+x\frac{x^{n-2}-1}{x-1}+\ldots+x\frac{x^2-1}{x-1}+x\frac{x-1}{x-1}=$$
$$=\frac{x}{x-1}[x+x^2+\ldots+x^n-n]=$$
$$=\frac{x}{x-1}\left[x\frac{x^n-1}{x-1}-n\right]=\frac{x^2(x^n-1)}{(x-1)^2}-\frac{nx}{x-1}.$$

Para $x=1$, la suma buscada es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, como la suma de los términos de una progresión aritmética.

18. Designemos la suma buscada por S_n. Entonces,

$$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}=$$
$$=1+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{2^3}+\frac{5}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)=$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}+S_n-\frac{2n-1}{2^n},$$

de donde

$$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

19. El aspecto general de estos números es el siguiente:

$$\overbrace{44\ldots4}^{n}\ \overbrace{88\ldots89}^{n-1}=4\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}\cdot10^n+8\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}+1.$$

El número $\overbrace{11\ldots1}^{n}$ puede escribirse en forma de la suma de los términos de una progresión geométrica con denominador 10:

$$\overbrace{11\ldots1}^{n}=1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

De este modo, tenemos:

$$\frac{4}{9}(10^n-1)10^n+\frac{8}{9}(10^n-1)+1=\frac{4}{9}10^{2n}+\frac{4}{9}10^n+\frac{1}{9}=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2.$$

20. Por la condición del problema $|q|<1$, y tenemos:

$$q^n=k(q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots)=kq^{n+1}\frac{1}{1-q}. \tag{1}$$

De aquí $1-q=kq$ y por consiguiente, si el problema tiene solución, entonces

$$q=\frac{1}{k+1}. \tag{2}$$

Sin embargo, se ve fácilmente, que si, al contrario, de la fórmula (2) se deduce que $|q|<1$, entonces la fórmula (2) trae consigo la igualdad (1), y la correspondiente progresión satisface a la condición del problema. Así pues, el problema es soluble para cualquier valor de k que satisfaga la desigualdad $\left|\frac{1}{k+1}\right|<1$. Esto último tiene lugar cuando $k>0$ o bien $k<-2$.

21. Llevaremos a cabo la demostración por el método de inducción completa. Examinemos al principio el caso de una progresión compuesta de tres términos x_1, x_2, x_3. Abriendo los paréntesis en la fórmula

$$(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)=(x_1x_2+x_2x_3)^2,$$

observaremos que

$$x_2^4+x_1^2x_3^2-2x_1x_2^2x_3=0,$$

de donde $(x_2^2-x_1x_3)^2=0$, y por consiguiente, $x_1x_3=x_2^2$. Con la condición de que $x_1\neq 0$, de aquí se deduce que los números x_1, x_2, x_3 forman una progresión geométrica. Supongamos ahora que la afirmación propuesta se ha demostrado para el caso de una progresión compuesta de k $(k\geqslant 3)$ términos:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k, \tag{1}$$

y que sea q el correspondiente denominador de la progresión. Examinemos entonces la sucesión compuesta de $k+1$ términos:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ x_{k+1} \tag{2}$$

Escribamos la condición correspondiente

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2+x_k^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2)=$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-1}x_k+x_kx_{k+1})^2 \tag{3}$$

y hagamos para abreviar $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2=a^2$. Observemes que $a\neq 0$, puesto que $x_1\neq 0$. Por la suposición inductiva tenemos:

$$x_2=qx_1;\quad x_3=qx_2;\quad \ldots,\quad x_k=qx_{k-1}, \tag{4}$$

Por esta razón, la igualdad (3) se puede volver a escribir de la siguiente manera:

$$(a^2+x_k^2)(q^2a^2+x_{k+1}^2)=(qa^2+x_kx_{k+1})^2.$$

Abriendo los paréntesis y agrupando los términos, estableceremos que

$$(x_kq-x_{k+1})^2a^2=0.$$

Puesto que $a\neq 0$, paralelo a (4) obtenemos $x_{k+1}=qx_k$. Por consiguiente, la sucesión x_1, x_2, $\ldots$, x_k, x_{k+1} representa una progresión geométrica con el mismo denominador $q=\frac{x_2}{x_1}$.

Basándonos en lo demostrado podemos afirmar que la sucesión formada con los n primeros términos de la sucesión dada, para cualquier valor real de n, es una progresión geométrica. Por esta razón, también la sucesión infinita dada forma una progresión, lo que se exigía demostrar.

22. Supongamos que sea $a_1 = b_1 = a$; entonces, según la condición de que $a_2 = b_2$ tenemos:

$$a + d = aq. \tag{1}$$

Aquí d y q son la razón y el denominador de las progresiones correspondientes Señalemos que por la condición de que $a_n > 0$, para todos los valores de n, la razón aritmética d no será negativa. Puesto que, además, $a_1 \neq a_2$, entonces $d > 0$.

Debido a esto, de la fórmula (1) se deduce que

$$q = 1 + \frac{d}{a} > 1.$$

Nos es necesario demostrar que siendo $n > 2$

$$a + (n-1)\,d < aq^{n-1}. \tag{2}$$

Puesto que de la igualdad (1) tenemos que $d = a\,(q-1)$, (2) es equivalente a la desigualdad

$$a\,(n-1)\,(q-1) < a\,(q^{n-1}-1)$$

Dividiendo ambas partes de esta desigualdad por la magnitud positiva $a\,(q-1)$, obtenemos:

$$n - 1 < 1 + q + \ldots + q^{n-2}.$$

Ya que $q > 1$, esta desigualdad es justa. El problema está resuelto.

23. Según la condición del problema

$$a_1 > 0, \quad \frac{a_2}{a_1} = q > 0 \quad \text{y} \quad b_2 - b_1 = d > 0,$$

donde, como ordinariamente, q es el denominador de la progresión geométrica, d es la razón aritmética. Aprovechando el hecho de que $a_n = a_1 q^{n-1}$ y que $b_n = b_1 + (n-1)\,d$, obtenemos:

$$^{\alpha}\log a_n - b_n = (n-1)\,(^{\alpha}\log q - d) + {}^{\alpha}\log a_1 - b_1.$$

Para que la razón aritmética examinada no dependa de n, es necesario y suficiente que $^{\alpha}\log q - d = 0$. Al resolver esta ecuación hallamos:

$$\alpha = q^{\frac{1}{d}}. \tag{1}$$

Por consiguiente, el número buscado α existe y se determina por la fórmula (1).

2. Ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones

24. Después de escribir el sistema dado en la forma

$$\left.\begin{aligned} (x+y)\,(x^2 - xy + y^2) &= 1, \\ y\,(x+y)^2 &= 2. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

dividimos miembro a miembro la primera ecuación por la segunda. Liberándonos del denominador y reduciendo a continuación los términos semejantes, obtenemos:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = 0. \tag{3}$$

Al resolver la ecuación cuadrada (3) respecto a y, obtenemos $y=x$ ó $y=2x$. Resolviendo a continuación cada una de estas ecuaciones junto con la ecuación (2), hallamos las soluciones reales de los correspondientes sistemas. Estas son solamente dos:

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \quad y_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4};$$
$$x_2=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}, \quad y_2=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}.$$

Cada uno de estos pares de números satisface también al sistema inicial; esto puede comprobarse mediante la sustitución directa o analizando el método por el cual fueron obtenidos.

25. Transformemos las ecuaciones del sistema dado en la forma

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2-xy&=4.\\(x+y)\ \ +xy&=2.\end{aligned}\right\}$$

De aquí

$$(x+y)^2+(x+y)=6$$

y por consiguiente, $x+y=2$ ó $x+y=-3$. Comparando cada una de estas ecuaciones con la segunda ecuación del sistema inicial, obtendremos los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=2\\xy&=0\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad\qquad \left.\begin{aligned}x+y&=-3\\xy&=\ \ 5\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

El sistema (1) tiene dos soluciones:

$$x_1=2,\qquad y_1=0;$$
$$x_2=0,\qquad y_2=2.$$

El sistema (2) tiene también dos soluciones:

$$x_3=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad y_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2};$$
$$x_4=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad y_4=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Es evidente que las soluciones de los sistemas indicados comprenden cada una de las soluciones del sistema inicial. Por medio de un simple análisis no es difícil demostrar lo contrario. Por otra parte, lo último es fácil de comprobar empleando la sustitución directa. Así pues, el problema tiene cuatro soluciones.

26. Transformemos las ecuaciones del sistema dado en la forma

$$\left.\begin{aligned}(x+y)[(x+y)^2-3xy]&=5a^3,\\xy(x+y)&=a^3,\end{aligned}\right\}$$

después de lo cual hagamos $x+y=u$, $xy=v$. Sustituyendo en la primera ecuación $xy(x+y)$ de la segunda, hallaremos que $u^3=8a^3$. Puesto que nos interesan solamente las soluciones reales, tendremos que $u=2a$. Ahora, de la segunda ecuación hallamos:

$$v=\frac{a^3}{u}=\frac{1}{2}a^2.$$

De este modo, obtenemos el siguiente sistema respecto a x e y:

$$x+y=2a,\quad xy=\frac{1}{2}a^2.$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$x_1=a\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad y_1=a\frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

$$x_2=a\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad y_2=a\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Estos números satisfacen también al sistema inicial, el cual, por consiguiente, tiene dos soluciones reales.

27. Reduciendo las ecuaciones dadas a un común denominador, transformemos el sistema en la forma

$$\left.\begin{array}{r}(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=12xy,\\ 3(x+y)=xy.\end{array}\right\}$$

Hagamos $x+y=u$, $xy=v$. Colocando $xy=v$ de la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$u(u^2-9u)=36u. \tag{1}$$

Señalemos que $u\neq 0$ (en el caso contrario, de la segunda ecuación tendriamos que $xy=0$, lo que contradice a la ecuación inicial). Por esta razón, de la ecuación (1) se deduce que, o $u=12$, o bien $u=-3$

En el primer caso ($u=12$) obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r}x+y=12,\\ xy=36,\end{array}\right\}$$

de donde $x=y=6$.

En el segundo caso ($u=-3$) tenemos:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=-3,\\ xy=-9.\end{array}\right\}$$

Este sistema tiene dos soluciones:

$$x=\frac{3}{2}(\pm\sqrt{5}-1),\quad y=\frac{3}{2}(\mp\sqrt{5}-1).$$

Las tres soluciones halladas satisfacen también al sistema inicial. Así pues, el sistema tiene sólo tres soluciones.

28. Elevando la segunda ecuación al cuadrado y restándola de la primera, obtenemos:

$$xy(x^2+y^2-xy)=21. \tag{1}$$

De aquí, en virtud de la segunda ecuación del sistema dado,

$$xy=3.$$

Colocando el valor de y en la segunda ecuación del sistema, obtenemos la ecuación bicuadrada

$$x^4-10x^2+9=0.$$

De donde, $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_4=-1$ y los valores correspondientes de y son los siguientes: $y_1=1$, $y_2=-1$, $y_3=3$, $y_4=-3$. Por comprobación nos convencemos de que los cuatro pares de números son las soluciones del sistema inicial. Por consiguiente, el sistema tiene cuatro soluciones:

$$x_1=3,\quad y_1=1;\quad x_2=-3,\quad y_2=-1;$$

$$x_3=1,\quad y_3=3;\quad x_4=-1,\quad y_4=-3.$$

29. Transformemos el sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned}(x-y)(x^2+y^2+xy-19)&=0,\\(x+y)(x^2+y^2-xy-7)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Con esto, el sistema inicial se reduce a los cuatro sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=0,\\x+y&=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad\left.\begin{aligned}x-y&=0,\\x^2+y^2-xy-7&=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy-19&=0,\\x+y&=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)\qquad\left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy-19&=0,\\x^2+y^2-xy-7&=0.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

El primer sistema tiene una sola solución: $x=0$, $y=0$. El segundo tiene dos soluciones: $x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm\sqrt{7}$. El tercero también tiene dos soluciones: $x=\pm\sqrt{19}$, $y=\mp\sqrt{19}$. Pasando al cuarto sistema, observemos que sumando ambas ecuaciones y restando una de la otra, sustituimos este sistema por el siguiente sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned}xy&=6,\\x^2+y^2&=13.\end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene cuatro soluciones:

$$x=\pm2,\quad y=\pm3\quad\text{y}\quad x=\pm3,\quad y=\pm2.$$

Así pues, el sistema propuesto en el problema tiene nueve soluciones:

$$(0,0),\ (\sqrt{7},\ \sqrt{7}),\ (-\sqrt{7},\ -\sqrt{7}),\ (\sqrt{19},\ -\sqrt{19}),\ (-\sqrt{19},\ \sqrt{19}),$$
$$(2,3),\ (-2,-3),\ (3,2),\ (-3,-2).$$

30. Transformemos las ecuaciones del sistema en la forma:

$$2(x+y)=5xy,$$
$$8(x+y)[(x+y)^2-3xy]=65.$$

Colocando $x+y$ de la primera ecuación en la segunda y haciendo $xy=v$, tendremos:

$$25v^3-12v^2-13=0.$$

Esta ecuación, evidentemente, se satisface cuando $v=1$. Dividiendo el miembro izquierdo entre $v-1$, obtenemos la ecuación

$$25v^2+13v+13=0.$$

Esta última ecuación no tiene raíces reales. Así pues, no queda más que una posibilidad: $v=1$. Colocando este valor en la primera ecuación, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned}xy&=1,\\x+y&=\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}$$

De aquí $x_1=2$, $y_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{1}{2}$, $y_2=2$.

Ambos pares de números satisfacen también la ecuación inicial. Así pues, el sistema tiene solamente dos soluciones reales.

31. Sumando ambas ecuaciones, y a continuación restando de la primera la segunda, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned}(x-y)(x^2+y^2+xy)&=7,\\(x-y)\,xy&=2.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Representando la primera ecuación en la forma

$$(x-y)^3+3xy(x-y)=7,$$

hallaremos que en virtud de la segunda ecuación $(x-y)^3=1$.

Por cuanto nos interesan solamente las soluciones reales, entonces, $x-y=1$. Teniendo esto en cuenta, hallamos fácilmente que $xy=2$.

Resolviendo a continuación el sistema

$$\left.\begin{aligned} xy&=2,\\ x-y&=1, \end{aligned}\right\}$$

hallamos sus dos soluciones:

$$x_1=2,\quad y_1=1;\quad x_2=-1,\quad y_2=-2.$$

No es difícil comprobar que los dos pares de números satisfacen al sistema inicial. Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones reales.

32. Transformamos la segunda ecuación en la forma

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=7.$$

Suponiendo que sea $x^2+y^2=u$ y $xy=v$, escribimos esta ecuación de la siguiente manera:

$$u^2-2v^2=7.$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación del sistema, obtenemos una condición más para u y v:

$$u+2v=1.$$

Eliminando a u de las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$v^2-2v-3=0,$$

de donde

$$v_1=3,\quad v_2=-1.$$

Entonces, los valores correspondientes de u serán iguales a

$$u_1=-5,\quad u_2=3.$$

Puesto que $u=x^2+y^2$ y a nosotros nos interesan solamente las soluciones reales de la ecuación inicial, entonces, el primer par de valores de u y v debe ser omitido. El segundo par nos da el sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=3,\\ xy&=-1. \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene cuatro soluciones reales

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\quad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Sin embargo, es fácil comprobar que al sistema inicial le satisfacen solamente las dos primeras de éstas. Así pues, el sistema propuesto en el problema tiene dos soluciones reales.

33. Elevando la primera ecuación a la quinta potencia y restando del resultado obtenido la segunda ecuación, después de las simplificaciones correspondientes, obtenemos que

$$xy(x^3+y^3)+2x^2y^2+6=0. \tag{1}$$

De la primera ecuación, después de elevarla al cubo, se desprende que $x^3+y^3=$ $=1-3xy$; en virtud de lo cual la ecuación (1) adquiere la forma

$$x^2y^2-xy-6=0.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$(xy)_1=3, \quad (xy)_2=-2.$$

Añadiendo a estos resultados $x+y=1$, hallaremos cuatro pares de números:

$$(2, -1); \quad (-1, 2); \quad \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \ \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}, \ \frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right).$$

Es fácil comprobar que todas estas soluciones satisfacen al sistema de ecuaciones inicial

34. Transformemos las ecuaciones del sistema a la forma

$$\left.\begin{aligned}(x^2-y^2)^2+x^2y^2&=13,\\ x^2-y^2+2xy&=1.\end{aligned}\right\}$$

Colocando x^2-y^2 de la segunda ecuación en la primera, obtendremos:

$$5(xy)^2-4xy-12=0.$$

De donde

$$(xy)_1=2, \quad (xy)_2=-\frac{6}{5}. \tag{1}$$

Puesto que nos interesan solamente las soluciones para las cuales $xy\geqslant 0$, entonces, existe una sola posibilidad

$$xy=2. \tag{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación y por su valor hallado de esta igualdad, obtendremos:

$$x^4+3x^2-4=0.$$

Entre todas las raíces de esta ecuación solamente dos son reales:

$$x_1=1 \quad \text{y} \quad x_2=-1.$$

Los valores correspondientes de y, en virtud de (2), serán:

$$y_1=2 \quad \text{y} \quad y_2=-2.$$

Ambos pares de números (x, y) satisfacen también al sistema inicial. Así pues, el problema tiene dos soluciones:

$$x_1=1, \quad y_1=2; \quad x_2=-1, \quad y_2=-2$$

35. Abriendo los paréntesis en las ecuaciones del sistema y haciendo $x+y=u$ e $xy=v$, escribimos el sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned}u^2+v^2-2v&=9,\\ uv-u&=3.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Si, ahora, multiplicamos ambos miembros de la segunda ecuación por 2 y, a continuación, al resultado obtenido le sumamos y le restamos los miembros correspondientes de la primera ecuación, el sistema (1) se sustituirá por el siguiente sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{l}(u+v)^2-2(u+v)=15,\\(u-v)^2+2(u-v)=3.\end{array}\right\}\qquad(2)$$

De la primera ecuación del sistema (2) recibimos:

$$(u+v)_1=5;\qquad(u+v)_2=-3.$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$(u-v)_1=-3;\qquad(u-v)_2=1.$$

De este modo, la determinación de todas las soluciones del sistema (2) se reduce a la resolución de los cuatro sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}u+v=5,\\u-v=-3,\end{array}\right\}\quad(3)\qquad\left.\begin{array}{l}u+v=5,\\u-v=1,\end{array}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{array}{l}u+v=-3,\\u-v=-3,\end{array}\right\}\quad(5)\qquad\left.\begin{array}{l}u+v=-3,\\u-v=1.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Solución del sistema (3): $u_1=1$, $v_1=4$; solución del sistema (4): $u_2=3$, $v_2=2$; solución del sistema (5): $u_3=-3$, $v_3=0$ y, por fin, solución del sistema (6): $u_4=-1$, $v_4=-2$.

Para hallar todas las soluciones del sistema inicial tendremos que resolver los siguientes cuatro sistemas de segundo orden, que se diferencian sólo por sus miembros derechos:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=1,\\xy=4,\end{array}\right\}\quad(7)\qquad\left.\begin{array}{r}x+y=3,\\xy=2,\end{array}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y=-3,\\xy=0,\end{array}\right\}\quad(9)\qquad\left.\begin{array}{r}x+y=-1,\\xy=-2.\end{array}\right\}\quad(10)$$

Resolviendo estas ecuaciones hallaremos todas las soluciones del sistema inicial. Estas serán solamente ocho:

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\quad\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$
$$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ -3),\ (1,\ -2),\ (-2,\ 1).$$

36. Señalemos al principio, que por el sentido del problema $x\neq0$ e $y\neq0$. Multiplicando los miembros izquierdos y derechos de las ecuaciones dadas, obtenemos:

$$x^4-y^4=6.\qquad(1)$$

Multiplicando cada una de las ecuaciones por xy y, a continuación, sumándolas, tendremos:

$$x^4-y^4+2x^2y^2=7xy.\qquad(2)$$

En virtud de (1) y (2), ahora obtenemos:

$$2x^2y^2-7xy+6=0,$$

de donde

$$(xy)_1=2;\qquad(xy)_2=\frac{3}{2}.\qquad(3)$$

Así pues, cualquier solución del sistema inicial satisface a la ecuación (1) y a una de las ecuaciones (3). Por esta razón, cada una de las dos ecuaciones (3) se podría resolver conjuntamente con la ecuación (1). Sin embargo, esto conduciría a una ecuación de octavo orden y complicaría la resolución definitiva del problema. En relación con esto, señalemos lo siguiente. Si multiplicamos de nuevo cada una de las ecuaciones del sistema inicial por xy y, a continuación, de la primera restamos la segunda, entonces, obtendremos la ecuación

$$x^4+y^4=5xy,$$

a la cual satisface también cualquier solución del sistema inicial.

Examinemos dos posibilidades:

1) Supongamos que en concordancia con (3)

$$xy=2. \tag{5}$$

Entonces, en virtud de (4), $x^4+y^4=10$. Resolviendo esta ecuación conjuntamente con (1), hallaremos:

$$x^4=8,$$

y, por consiguiente,

$$x_1=\sqrt[4]{8}, \quad x_2=-\sqrt[4]{8}, \quad x_3=i\sqrt[4]{8}, \quad x_4=-i\sqrt[4]{8}.$$

En virtud de (5), los correspondientes valores de y serán:

$$y_1=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{2}, \quad y_2=-\sqrt[4]{2}, \quad y_3=-i\sqrt[4]{2}, \quad y_4=i\sqrt[4]{2}.$$

2) En el segundo caso

$$xy=\frac{3}{2}. \tag{6}$$

La ecuación (4) nos conduce, entonces, a la relación

$$x^4+y^4=\frac{15}{12}$$

que junto con (1) da

$$x^4=\frac{27}{4}.$$

De aquí,

$$x_5=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_6=-\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_7=i\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_8=-i\sqrt[4]{\frac{27}{4}};$$

los valores correspondientes de y son:

$$y_5=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \quad y_6=-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \quad y_7=-i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \quad y_8=i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Así pues, entre los ocho pares de números hallados se encuentra cualquier solución del sistema inicial. Es fácil comprobar que los ocho pares de números hallados satisfacen al sistema inicial. Por consiguiente, se han hallado todas las soluciones del sistema.

37. Transformamos la segunda ecuación en la forma

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=bx^2y^2.$$

Sustituyendo aquí x^2+y^2 por axy de la primera ecuación, hallaremos:

$$(a^2-2-b)\,x^2y^2=0.$$

Son posibles dos casos:

1) $a^2-2-b\neq 0$. Es fácil de ver, que para esta condición el sistema tiene una sola solución: $x=0$, $y=0$.

2) $a^2-2-b=0$. Cumpliendo esta condición, la segunda ecuación se obtiene como resultado de elevar al cuadrado ambos miembros de la primera. Por eso,

si x e y es un par de números cualquiera que satisfacen a la primera ecuación, entonces, este par de números satisfacerá a la segunda. Por consiguiente, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

38. Transformemos el miembro izquierdo de la ecuación en la forma

$$\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\,\frac{x-a}{x-b}\right)+\frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x-a}{x-b}-\frac{b}{a}\,\frac{x+a}{x+b}\right)=0$$

Notando que las expresiones entre paréntesis se diferencian por el factor $-\frac{a}{b}$, obtenemos:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\,\frac{x-a}{x-b}\right)\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{b}{a}\,\frac{x-a}{x-b}\right)=0.$$

De aquí, con la condición de que $a\neq b$, obtenemos

$$[x^2-(a+b)\,x-ab]\,[x^2+(a+b)\,x-ab]=0,$$

y hallamos cuatro soluciones de la ecuación inicial:

$$x_{1,\,2}=\frac{(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2},$$

$$x_{3,\,4}=\frac{-(a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}.$$

En el caso de que sea $a=b$, todos los valores de x satisfacen a la ecuación.

39. Supongamos que sea $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$; entonces, la ecuación se reduce a la forma

$$3t^2-10t+8=0.$$

De aquí

$$t_1=2 \quad \text{y} \quad t_2=\frac{4}{3}.$$

Resolviendo a continuación dos ecuaciones cuadradas respecto a x, hallaremos cuatro raíces de la ecuación inicial:

$$x_1=3+\sqrt{21},\quad x_2=3-\sqrt{21},\quad x_3=6,\quad x_4=-2.$$

40. Supongamos que sea

$$\frac{x+y}{xy}=u \quad \text{y} \quad \frac{x-y}{xy}=v. \tag{1}$$

Entonces, la ecuación del sistema dado se puede escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} u+\frac{1}{u}&=a+\frac{1}{a},\\ v+\frac{1}{v}&=b+\frac{1}{b}.\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones, hallaremos:

$$u_1=a,\quad u_2=\frac{1}{a}, \tag{2}$$

$$v_1=b,\quad v_2=\frac{1}{b}. \tag{3}$$

Ahora, tenemos que resolver cuatro sistemas del tipo (1) en cuyos miembros derechos se encuentran todas las combinaciones posibles de los valores de u y v, determinados por las fórmulas (2) y (3). Escribamos el sistema (1) en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}&=u,\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}&=v \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

De aquí obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}&=\frac{1}{2}(u-v),\\ \frac{1}{y}&=\frac{1}{2}(u+v). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

De las fórmulas (5) se desprende que para que el sistema (4) sea resoluble y, por lo tanto, también el sistema inicial, los números a y b deben obedecer a condiciones suplementarias, además de la condición de que $ab \neq 0$ que se desprende de la forma de la ecuación del sistema inicial. Sea que

$$|a| \neq |b|. \tag{6}$$

Entonces, colocando en los miembros derechos de las fórmulas (5) los valores $u=a$, $v=b$, y, a continuación, $u=\frac{1}{a}$, $v=\frac{1}{b}$, hallaremos dos soluciones:

$$x_1=\frac{2}{a-b}, \quad y_1=\frac{2}{a+b}; \quad x_2=\frac{2ab}{b-a}, \quad y_2=\frac{2ab}{a+b}.$$

Supongamos que, a continuación,

$$|ab| \neq 1. \tag{7}$$

Colocando en los miembros derechos de las fórmulas (5) los valores $u=a$, $v=\frac{1}{b}$, y, a continuación, $u=\frac{1}{a}$, $v=b$, hallaremos dos soluciones más:

$$x_3=\frac{2b}{ab-1}, \quad y_3=\frac{2b}{ab+1}; \quad x_4=\frac{2a}{1-ab}, \quad y_4=\frac{2a}{1+ab}.$$

Así pues, si se cumplen las dos condiciones (6) y (7), el sistema tiene cuatro soluciones; si se incumple una de las condiciones, el sistema tiene sólo dos soluciones; si, por fin, se incumplen las dos condiciones (esto puede suceder solamente en el caso de que $|a|=|b|=1$), el sistema no tiene soluciones.

41. Es fácil de ver que los números

$$x_1=4{,}5 \quad \text{y} \quad x_2=5{,}5$$

satisfacen a la ecuación dada. Por eso, el polinomio

$$(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4-1$$

es múltiplo del producto $(x-4{,}5)(x-5{,}5)$. Para realizar la división y reducir el problema a la resolución de la ecuación cuadrada, es cómodo representar el polinomio indicado en la forma

$$[(x-4{,}5)^4-1]+(x-5{,}5)^4.$$

Descomponiendo la expresión contenida entre los corchetes por la fórmula

$$\alpha^4-1=(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1),$$

obtenemos la ecuación

$$(x-5{,}5)\left\{(x-4{,}5)^3+(x-4{,}5)^2+(x-4{,}5)+1\right\}+(x-5{,}5)^4=0.$$

Sacando el factor común de entre paréntesis, tendremos:

$$(x-5{,}5)\left\{(x-4{,}5)^3+(x-4{,}5)^2+(x-4{,}5)+1+[(x-4{,}5)-1]^3\right\}=$$
$$=(x-5{,}5)(x-4{,}5)\left\{2(x-4{,}5)^2-2(x-4{,}5)+4\right\}=0.$$

De aquí

$$x_1=5{,}5,\quad x_2=4{,}5,\quad x_{3,4}=\frac{10\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

42. De la segunda ecuación del sistema hallamos que $y-5=|x-1|\geqslant 0$ y, por consiguiente, $y\geqslant 5$. Por esta razón, la primera ecuación puede escribirse en la forma

$$y-5=1-|x-1|.$$

Sumando esta ecuación a la segunda, obtendremos:

$$2(y-5)=1.$$

De aquí $y=\frac{11}{2}$.

Ahora, de la segunda ecuación hallamos $|x-1|=\frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $x-1=\pm\frac{1}{2}$. Por eso, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. El sistema tiene dos soluciones:

$$x_1=\frac{1}{2},\quad y_1=\frac{11}{2};\quad x_2=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{11}{2}.$$

43. Por agrupación de los términos reducimos el miembro izquierdo a la forma

$$(2x+y-1)^2+(x+2y+1)^2=0.$$

Por consiguiente,

$$2x+y-1=0\qquad x+2y+1=0.$$

De donde

$$x=1,\qquad y=-1.$$

Señalemos un método más de resolución. Disponiendo los sumandos del miembro izquierdo según las potencias decrecientes de x, obtendremos una ecuación cuadrada respecto de x:

$$5x^2+(8y-2)x+(5y^2+2y+2)=0. \tag{1}$$

Esta ecuación, para los valores reales de y tiene raíces reales solamente cuando su discriminante no es negativo, es decir,

$$(8y-2)^2-4\cdot 5(5y^2+2y+2)\geqslant 0. \tag{2}$$

Después de abrir los paréntesis, esta desigualdad adquiere el aspecto

$$-36(y+1)^2\geqslant 0.$$

Esto último es posible solamente cuando $y=-1$, y, entonces, de la ecuación (1) se desprende que $x=1$.

44. Transformemos la ecuación en la forma

$$[x+2\cos(xy)]^2+4[1-\cos^2(xy)]=0.$$

Ninguno de los dos sumandos es negativo, por eso

$$x+2\cos(xy)=0,\qquad \cos^2(xy)=1.$$

De aquí, $\cos(xy)=\pm 1$. En el primer caso tenemos el sistema

$$\cos(xy)=1, \quad x+2\cos(xy)=0.$$

De aquí, $x=-2$ e $y=k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

En el segundo caso,

$$\cos(xy)=-1 \quad x+2\cos(xy)=0.$$

De aquí, $x=2$ e $y=\frac{\pi}{2}(2m+1)$, donde $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Así pues, la ecuación tiene dos series infinitas de diferentes soluciones reales, con la particularidad de que el valor de x en cada serie es el mismo.

45. Eliminando z del sistema dado, tendremos:

$$2xy-(2-x-y)^2=4$$

o bien

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=0,$$

es decir,

$$(x-2)^2+(y-2)^2=0.$$

Para los números reales x e y esto es posible solamente cuando $x=2$ e $y=2$.

De la primera ecuación del sistema hallamos $z=-2$ El sistema tiene sólo una solución real:

$$x=2, \quad y=2, \quad z=-2.$$

46. Primera solución. Notemos que, por las magnitudes x e y dadas, el valor de z se determina de la primera ecuación de una sola manera:

$$z=x^2+y^2 \tag{1}$$

Colocando este valor de z en la segunda ecuación, obtenemos:

$$x^2+x+y^2+y=a.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Si ahora $a+\frac{1}{2}<0$, entonces, la ecuación (2) no tiene soluciones reales, puesto que siendo x e y reales, en el miembro izquierdo se encuentra un número no negativo. Si $a+\frac{1}{2}>0$, entonces, la ecuación (2) y junto con ésta todo el sistema, tiene, evidentemente, más de una solución.

Por consiguiente, la única solución real es posible solamente cuando $a+\frac{1}{2}=0$. En este caso, la ecuación (2) adquiere la forma

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

y tiene la única solución real: $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. De aquí, hallando z de la ecuación (1) deducimos que el sistema dado tiene la única solución real solamente cuando $a=-\frac{1}{2}$ a saber:

$$x=-\frac{1}{2}, \quad y=-\frac{1}{2}, \quad z=\frac{1}{2}.$$

Segunda solución. Se ve fácilmente, que si el sistema dado tiene cierta solución $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, entonces, este sistema tiene también la siguiente solución: $x=y_0$, $y=x_0$, $z=z_0$. Por eso, para que el sistema tenga una sola solución es necesario que $x=y$. Con esta condición, el sistema dado adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} 2x^2&=z, \\ 2x+z&=a. \end{aligned}\right\}$$

Eliminando a z, obtenemos la ecuación cuadrada respecto a x:

$$2x^2+2x-a=0.$$

Para que también esta ecuación tenga una sola solución real, en necesario y suficiente que el discriminante de la ecuación sea igual a cero:

$$D=2^2-4\cdot 2\,(-a)=4\,(1+2a)=0.$$

De aquí, $a=-\frac{1}{2}$ y el valor correspondiente de $x=-\frac{1}{2}$. En resumidas cuentas, obtenemos el resultado anterior.

47. Supongamos que sean x_0 e y_0 ciertas soluciones del sistema. En virtud de la primera ecuación

$$\left[(x_0^2+y_0^2)-a\right]^2=x_0^2y_0^2+\frac{1}{x_0^2y_0^2}+2, \tag{1}$$

y de acuerdo con la segunda ecuación

$$(x_0^2+y_0^2)^2=x_0^2y_0^2+\frac{1}{x_0^2y_0^2}+2+b^2 \tag{2}$$

Abriendo en el miembro izquierdo de la ecuación (1) los corchetes y restándole la ecuación (2), obtenemos:

$$-2a\,(x_0^2+y_0^2)+a^2=-b^2.$$

De aquí

$$x_0^2+y_0^2=\frac{a^2+b^2}{2a}.$$

Puesto que a y b son números reales, la confirmación queda demostrada.

48. Es fácil de ver que el sistema tiene siempre la solución

$$x=1,\qquad y=1,\qquad z=1. \tag{1}$$

Es también evidente que en el caso de que

$$a=b=c \tag{2}$$

las tres ecuaciones toman la forma $x+y+z=3$ y el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Demostremos que si no se cumple la condición (2) es decir, que si no todos los tres números a, b y c son iguales, entonces la solución (1) es la única posible.

Sumando primero las tres ecuaciones del sistema dado obtenemos:

$$(a+b+c)\,(x+y+z)=3\,(a+b+c).$$

Simplificando por $a+b+c$, hallamos:

$$x+y+z=3. \tag{3}$$

De aquí $z=3-x-y$. Colocando esta expresión de z en las dos primeras ecuaciones del sistema tendremos:

$$\left.\begin{aligned}(a-c)\,x+(b-c)\,y&=a+b-2c,\\(b-a)\,x+(c-a)\,y&=-2a+b+c.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $c-a$, la segunda por $c-b$ y sumándolas, hallaremos:

$$[-(a-c)^2+(b-a)(c-b)]\,x=(a+b-2c)(c-a)+(c-b)(-2a+b+c)\qquad(5)$$

Por cuanto la ecuación (5) se satisface siendo $x=1$, el coeficiente de x debe coincidir idénticamente, según a, b y c, con el segundo miembro de la ecuación. Abriendo los paréntesis en ambas expresiones, nos convencemos de que verdaderamente coinciden y son iguales a:

$$-\frac{1}{2}\,[2a^2-4ac+2c^2-2bc+2b^2+2ac-2ab]=-\frac{1}{2}\,[(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2].$$

Por lo tanto, si entre los números a, b y c hay desiguales, entonces, la ecuación (5) se satisface solamente en el caso de que sea $x=1$. Después de esto, de la ecuación (4) se desprende con facilidad que $y=1$, y de la relación (3), que $z=1$. Así pues, con la condición de que

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2\neq 0$$

el sistema tiene una sola solución:

$$x=1,\qquad y=1,\qquad z=1.$$

49. Sumando todas las ecuaciones, obtenemos que

$$(a+2)(x+y+z)=1+a+a^2.\qquad(1)$$

Si $a\neq-2$, entonces,

$$x+y+z=\frac{1+a+a^2}{a+2}.$$

Resolviendo esta ecuación junto con cada una de las ecuaciones del sistema inicial, suponiendo que $a\neq 1$, hallaremos.

$$x=-\frac{1+a}{a+2},\qquad y=\frac{1}{a+2}\qquad z=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Siendo $a=-2$ el sistema es incompatible (la ecuación (1) es imposible cualesquiera que sean los valores de x, y, z). Si $a=1$ el sistema es indeterminado: tres números cualesquiera que satisfagan la condición $x+y+z=1$ forman una solución.

50. Se ve fácilmente, que si dos de los tres números a_1, a_2, a_3 son iguales a cero, entonces, el sistema tiene una multitud infinita de soluciones. En efecto, supongamos, por ejemplo, que $a_2=0$ y $a_3=0$. Haciendo, en este caso $x=0$ y eligiendo a y y z tales que se satisfaga la ecuación $x+z=1$, se satisfarán las tres ecuaciones del sistema.

Por eso, al buscar la condición de unicidad, podemos suponer desde el principio que dos números cualesquiera difieren de cero. Supongamos, por ejemplo que

$$a_2\neq 0\quad\text{y}\quad a_3\neq 0.\qquad(1)$$

Restando de la segunda ecuación la primera y de la tercera la segunda, hallamos que $a_1x=a_2y=a_3z$. De aquí, en virtud de (1), se desprende que:

$$y=\frac{a_1}{a_2}\,x,\qquad z\,\frac{a_1}{a_3}\,x.\qquad(2)$$

Colocando estas expresiones en la primera ecuación, obtenemos:

$$x\left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}\right)=1. \tag{3}$$

Esta ecuación es resoluble solamente con la condición de que la expresión entre paréntesis difiere de cero.

Teniendo en cuenta (1), llegamos a la condición

$$D=a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2a_3\neq 0. \tag{4}$$

Cumpliendo esta condición, de (3) y (2) hallamos:

$$x=\frac{a_2a_3}{D}, \quad y=\frac{a_1a_3}{D}, \quad z=\frac{a_1a_2}{D}. \tag{5}$$

Estos tres números forman la solución del sistema y, además, como se desprende del método de su obtención, única.

Así pues, la condición (4) es una condición imprescendible para que el sistema tenga solución y, además, única.

Es fácil de comprobar, que si al principio hubiéramos supuesto diferentes de cero a otro par de números a_1, a_3 o a_1, a_2, entonces, un razonamiento análogo nos conduciría de nuevo a la condición (4) y a la misma solución (5). Puesto que, a continuación, de la condición (4) se desprende que si aunque sea uno de los tres pares de números no es igual a cero, entonces, la condición indicada no solamente es indispensable, sino también suficiente.

51. Multiplicamos la ecuación por a, $-b$, $-c$, $-d$, respectivamente, y realizamos la suma. Hallamos que

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\,x=ap-bq-cr-ds$$

o

$$x=\frac{ap-bq-cr-ds}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Análogamente hallamos que

$$y=\frac{bp+aq-dr+cs}{a^2+b^2+c^2+d^2}; \quad z=\frac{cp+dq+ar-bs}{a^2+b^2+c^2+d^2}; \quad t=\frac{dp-cq+br+as}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

52. Sumando todas las ecuaciones del sistema hallaremos:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{2\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n\,(n+1)}. \tag{1}$$

El segundo miembro de esta ecuación lo designamos por A. Restando de la primera ecuación la segunda, obtenemos:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)-nx_1=a_1-a_2.$$

En virtud de (1) tenemos:

$$x_1=\frac{A-(a_1-a_2)}{n}.$$

En general, para obtener x_k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ restamos de la k—ésima ecuación la $(k+1)$—ésima. Análogamente a lo interior hallaremos:

$$x_k=\frac{A-(a_k-a_{k+1})}{n}.$$

Por fin, restando de la última ecuación la primera, obtendremos:

$$x_n=\frac{A-(a_n-a_1)}{n}.$$

Los valores hallados pueden ser agrupados en una sola fórmula:

$$x_i=\frac{A-(a_i-a_{i+1})}{n}\ (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2}$$

(aquí, por a_{n+1} debe entenderse a_1). Mediante la sustitución directa nos convencemos de que el conjunto de números (2) satisface realmente a todas las ecuaciones del sistema. Así pues, el sistema dado tiene una sola solución.

53. Sumando todas las igualdades y dividiendo el resultado obtenido por tres, tendremos:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=0. \tag{1}$$

El miembro izquierdo de esta nueva ecuación tiene cien sumandos y puede ser presentado en la siguiente forma:

$$(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+\ldots+(x_{97}+x_{98}+x_{99})+x_{100}=0.$$

Pero, según las igualdades iniciales, cada suma encerrada entre paréntesis es igual a cero. Por esta razón $x_{100}=0$. De manera análoga, pasando x_{100} al primer lugar y presentando la igualdad (1) en la forma

$$(x_{100}+x_1+x_2)+(x_3+x_4+x_5)+\ldots+(x_{96}+x_{97}+x_{98})+x_{99}=0,$$

hallaremos que $x_{99}=0$. Colocando a continuación x_{99} en el primer lugar y agrupando de nuevo los sumandos de tres en tres, nos convenceremos de que $x_{98}=0$, etc. Así pues,

$$x_1=x_2=\ldots=x_{100}=0,$$

lo que se exigía demostrar.

54. Sumando todas las ecuaciones tendremos que

$$(x+y+z)^2-(x+y+z)-12=0. \tag{1}$$

Hagamos $x+y+z=t$, entonces, de la ecuación (1) hallaremos:

$$t_1=-3,\quad t_2=4. \tag{2}$$

Colocando la suma $y+z=t-x$ en la primera ecuación del sistema inicial, hallaremos que

$$x^2+x(t-x)-x=2,$$

de donde,

$$x=\frac{2}{t-1}. \tag{3}$$

De la misma manera, la sustitución de $x+z=t-y$ en la segunda y de $x+y=$ $=t-z$ en la tercera ecuación del sistema inicial nos da

$$y=\frac{4}{t-1} \tag{4}$$

y

$$z=\frac{6}{t-1}. \tag{5}$$

Colocando los dos valores de t en las fórmulas (3), (4) y (5), hallaremos las dos soluciones del sistema inicial

$$\left(-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2}\right);\quad \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 2\right).$$

55. Escribimos el sistema en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7+z,\\ x^2+y^2&=37+z^2,\\ x^3+y^3&=1+z^3.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Elevando la primera ecuación al cuadrado y eliminando x^2+y^2 con ayuda de la segunda ecuación, hallamos que

$$(7+z)^2=37+z^2+2xy,$$

de donde

$$xy=6+7z.$$

A continuación, obtenemos que

$$(7+z)^3=x^3+y^3+3xy\,(x+y)$$

o

$$x^3+y^3=(7+z)^3-3\,(6+7z)\,(7+z)=z^3-18z+217. \tag{2}$$

Comparando (2) con la última ecuación del sistema (1), hallamos que $z=12$. Pero, entonces

$$\left.\begin{aligned} x+y&=19,\\ xy&=90.\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, obtenemos:

$$x_1=9,\quad y_1=10,\quad z_1=12 \quad \text{y} \quad x_2=10,\quad y_2=9,\quad z_2=12.$$

Por sustitución, es fácil de comprobar que estos dos conjuntos de números satisfacen también al sistema inicial. Así pues, el sistema inicial tiene dos soluciones.

56. Dividimos la primera ecuación entre la segunda y la tercera; como resultado obtenemos

$$\frac{y+z}{x+y}=\frac{5}{3} \qquad \frac{z+x}{x+y}=\frac{4}{3}.$$

Multiplicando ambas ecuaciones por $x+y$, hallamos:

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y-3z&=0,\\ x+4y-3z&=0.\end{aligned}\right\}$$

De estas ecuaciones se desprende que $y=2x$, $z=3x$. Colocando de aquí el valor de y y z en la primera ecuación del sistema inicial, hallaremos que $x^2=1$. Como resultado obtenemos:

$$x_1=1,\quad y_1=2,\quad z_1=3;\quad x_2=-1,\quad y_2=-2,\quad z_2=-3.$$

Realizando la verificación nos convencemos de que los dos conjuntos de números satisfacen también al sistema inicial.

57. Fijándonos en que la diferencia de dos ecuaciones del sistema propuesto se descompone en factores, formamos la diferencia entre la primera y la segunda ecuaciones y entre la primera y la tercera. Las dos ecuaciones obtenidas de esta manera, junto con la tercera ecuación del sistema inicial, compondrán el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (u-w)\,(u+w-1)&=0,\\ (v-w)\,(v+w-1)&=0,\\ w^2+u^2+v&=2.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es evidente, que cualquiera solución del sistema inicial satisface al sistema (1). Puesto que, y al contrario, todas las ecuaciones del sistema inicial pueden ser obtenidas sumando y restando las ecuaciones del sistema (1), entonces, toda solución del sistema (1) es al mismo tiempo la solución del sistema inicial y, por consiguiente, estos sistemas son equivalentes.

El sistema (1) se descompone en los cuatro sistemas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} u-w&=0,\\ v-w&=0,\\ w^2+u^2+v&=2, \end{aligned}\right\} \quad (2) \qquad \left.\begin{aligned} u-w&=0,\\ v+w-1&=0,\\ w^2+u^2+v&=2, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} u+w-1&=0,\\ v-w&=0,\\ w^2+u^2+v&=2, \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad \left.\begin{aligned} u+w-1&=0,\\ v+w-1&=0,\\ w^2+u^2+v&=2. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En virtud de lo dicho, es evidente que todas las soluciones de estos cuatro sistemas, y solamente ellas, son al mismo tiempo las soluciones del sistema inicial. Cada uno de estos cuatro sistemas dados puede reducirse sin dificultad a una ecuación cuadrada y tiene dos soluciones. Expongamos las soluciones correspondientes (u, v, w) omitiendo los cálculos. Soluciones del sistema (2):

$$\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right),$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right).$$

Soluciones del sistema (3):

$$(1, 0, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ -\frac{1}{2}\right).$$

Soluciones del sistema (4):

$$(0, 1, 1), \quad \left(\frac{3}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}\right).$$

Soluciones del sistema (5):

$$(1, 1, 0), \quad \left(-\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}\right).$$

Así pues, el sistema inicial tiene en total ocho soluciones.

58. Restando de la segunda ecuación la primera, obtenemos:

$$z^2-y^2+x(z-y)=3,$$

de donde

$$(z-y)(x+y+z)=3.$$

Restando de la tercera ecuación la segunda, análogamente hallamos

$$(y-x)(x+y+z)=3.$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$z-y=y-x. \tag{1}$$

A continuación, escribimos el sistema inicial en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} (x-y)^2&=1-3xy,\\ (x-z)^2&=4-3xz,\\ (y-z)^2&=7-3yz. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De (1) se desprende que los miembros derechos de la primera y tercera ecuaciones del sistema (2) son iguales, es decir, que

$$1-3xy=7-3yz,$$

de donde

$$z-x=\frac{2}{y}. \tag{3}$$

Puesto que de acuerdo con (1)

$$z+x=2y, \tag{4}$$

entonces, resolviendo conjuntamente (3) y (4) hallamos:

$$x=y-\frac{1}{y}, \qquad z=y+\frac{1}{y}.$$

Colocando la expresión obtenida para x en la primera ecuación del sistema inicial tendremos que

$$3y^4-4y^2+1=0,$$

de donde

$$y_{1,2}=\pm 1, \qquad y_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como resultado, hallamos cuatro conjuntos de números

$$(0,\ 1,\ 2), \quad (0\ -1,\ -2);$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Mediante la verificación nos convencemos de que todos estos conjuntos satisfacen al sistema inicial.

59. Multiplicando los primeros y segundos miembros de las ecuaciones entre sí, obtenemos:

$$(x_1x_2\ \ldots\ x_n)^{n-2}=a_1a_2\ \ldots\ a_n,$$

de donde

$$x_1x_2\ \ldots\ x_n=\sqrt[n-2]{a_1a_2\ \ldots\ a_n}; \tag{1}$$

escribimos la k-ésima ecuación del sistema en la forma

$$a_kx_k^2=x_1x_2\ \ldots\ x_n.$$

De aquí, en virtud de (1), tenemos:

$$x_k=\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2\ \ldots\ a_n}}{a_k}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Por medio de la comprobación nos convencemos de que este conjunto de números satisface al sistema inicial. Así pues, el problema tiene una sola solución.

60. Notemos al principio que siendo $a=1$ el sistema toma la forma

$$\left.\begin{aligned}(x+y+z)^2&=k^2,\\(x+y+z)^2&=l^2,\\(x+y+z)^2&=m^2.\end{aligned}\right\}$$

Este sistema es resoluble únicamente con una condición complementaria

$$k^2=l^2=m^2. \tag{1}$$

Con esta condición, es evidente que se obtendrá una cantidad infinita de soluciones. A continuación, podemos suponer que

$$a\neq 1. \tag{2}$$

Sumando todas las ecuaciones del sistema y haciendo, para simplificar,

$$x+y+z=t,$$

obtenemos:

$$t^2(a+2)=k^2+l^2+m^2.$$

Puesto que según la condición del problema el miembro derecho es positivo, para $a=-2$ el sistema no tiene solución. Considerando que

$$a \neq -2, \tag{3}$$

hallamos:

$$t=\pm\sqrt{\frac{k^2+l^2+m^2}{a+2}}. \tag{4}$$

Transformando a continuación las ecuaciones del sistema en la forma:

$$\left.\begin{aligned} t^2+t(a-1)x&=k^2,\\ t^2+t(a-1)y&=l^2,\\ t^2+t(a-1)z&=m^2, \end{aligned}\right\}$$

de acuerdo con (4), hallamos de aquí dos conjuntos de valores de x e y:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\,\frac{k^2(a+1)-l^2-m^2}{(a+2)(a-1)},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\,\frac{l^2(a+1)-k^2-m^2}{(a+2)(a-1)},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\,\frac{m^2(a+1)-k^2-l^2}{(a+2)(a-1)}.$$

Realizando la comprobación establecemos que las dos ternas de números satisfacen al sistema inicial. Así pues, en el caso general ($a\neq 1$, $a\neq -2$) el sistema tiene dos soluciones diferentes.

61. Elevando la primera ecuación al cuadrado y restando de la relación obtenida la segunda ecuación, hallaremos:

$$xy+yz+zx=11. \tag{1}$$

En virtud de la tercera ecuación, de aquí se desprende que

$$(xy)^2+3xy-10=0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$(xy)_1=2, \qquad (xy)_2=-5. \tag{2}$$

Examinemos dos posibilidades.

1) Supongamos que sea

$$xy=2. \tag{3}$$

Eliminando $x+y$ de la primera y tercera ecuaciones del sistema inicial, obtenemos la siguiente ecuación respecto de z.

$$z^2-6z+9=0.$$

De aquí se deduce que $z^{(1)}=3$.

Entonces, la primera ecuación da

$$x+y=3.$$

Resolviendo esta ecuación junto con la ecuación (3), obtenemos:

$$x_1^{(1)}=1 \qquad y_1^{(1)}=2,$$
$$x_2^{(1)}=2, \qquad y_2^{(1)}=1.$$

2) Supongamos ahora que de acuerdo con (2)

$$xy=-5. \tag{4}$$

En este caso, de la primera y tercera ecuaciones obtenemos:

$$z^2-6z+16=0.$$

Las raices de esta ecuación son irreales y, por consiguiente, las investigaciones relacionadas con la condición (4) pueden no llevarse a cabo.

Así pues, soluciones reales pueden ser solamente las siguientes ternas de números (x, y, z):

$$(1, 2, 3) \quad \text{y} \quad (2, 1, 3).$$

Madiante la verificación nos convencemos de que ambas ternas de números satisfacen al sistema inicial. Así pues, han sido halladas todas las soluciones reales del sistema.

62. Se ve fácilmente que los primeros miembros de las ecuaciones pueden ser descompuestos en factores, como resultado de lo cual el sistema toma la forma

$$\left.\begin{aligned}(x+y)(x+z)&=a,\\(x+y)(y+z)&=b,\\(x+z)(y+z)&=c.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hagamos para simplificar

$$x+y=u, \qquad x+z=v, \qquad y+z=w.$$

Entonces

$$\left.\begin{aligned}uv&=a,\\uw&=b,\\vw&=c.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Multiplicando todas las ecuaciones entre sí, hallaremos:

$$(uvw)^2=abc,$$

de donde

$$uvw=\pm\sqrt{abc}. \tag{3}$$

Ahora, la determinación de todas las soluciones del sistema (2) no representa ninguna dificultad. Eligiendo en la fórmula (3), al principio, el signo más y, a continuación, el menos, establecemos que el sistema (2) tiene dos soluciones:

$$u_1=\frac{\sqrt{abc}}{c}, \qquad v_1=\frac{\sqrt{abc}}{b}, \qquad w_1=\frac{\sqrt{abc}}{a} \tag{4}$$

y

$$u_2=\frac{-\sqrt{abc}}{c}, \qquad v_2=\frac{-\sqrt{abc}}{b}, \qquad w_2=\frac{-\sqrt{abc}}{a}. \tag{5}$$

Queda resolver dos sistemas de ecuaciones, obtenidos al colocar los valores (4) y (5) en los miembros derechos de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}x+y&=u,\\x+z&=v,\\y+z&=w.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Sumando las ecuaciones (6), obtenemos

$$x+y+z=\frac{u+v+w}{2}.$$

De aquí, en virtud de (6), se desprende fácilmente que

$$x=\frac{u+v-w}{2},\quad y=\frac{u-v+w}{2},\quad z=\frac{-u+v+w}{2}. \tag{7}$$

Así pues, el sistema inicial tiene solamente dos soluciones que se determinan por las fórmulas (7) colocando en éstas los valores (4) y (5).

63. Sumando todas las ecuaciones hallaremos:

$$xy+xz+yz=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \tag{1}$$

En virtud de las ecuaciones del sistema, ahora obtenemos fácilmente que

$$\left.\begin{aligned} xy&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\alpha,\\ xz&=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}=\beta,\\ yz&=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}=\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aquí hemos introducido, para mayor comodidad, designaciones simplificadas para los quebrados obtenidos. Notemos que si el sistema inicial tiene solución, entonces, en nuestras condiciones los tres números α, β y γ se diferencian de cero. En efecto, supongamos, por ejemplo, que $\alpha=0$. Entonces $\beta\gamma=xyz^2=0$. Sumando la primera ecuación del sistema (2) con la segunda y la tercera, obtenemos:

$$a^2=\beta,\quad b^2=\gamma,$$

de donde $a^2b^2=0$, lo que contradice a la condición del problema. Así pues, $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Por esta razón, el sistema (2) coincide exactamente con el sistema (2) del problema anterior. Por consiguiente, este sistema tiene dos soluciones:

$$x_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\gamma},\qquad y_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta},\qquad z_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha}; \tag{3}$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\gamma},\qquad y_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta},\qquad z_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha}. \tag{4}$$

Es fácil de comprobar que estos dos conjuntos de números satisfacen también al sistema inicial. De este modo, las soluciones (3) y (4) contienen todas las soluciones del sistema.

64. Hagamos

$$xy+xz+yz=t^3. \tag{1}$$

Entonces, el sistema se puede escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} y^3+z^3&=2at^3,\\ z^3+x^3&=2bt^3,\\ x^3+y^3&=2ct^3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sumando todas las ecuaciones de este sistema, hallaremos que

$$x^3+y^3+z^3=(a+b+c)\,t^3. \tag{3}$$

Restando consecutivamente de esta ecuación las ecuaciones del sistema (2), obtenemos:

$$x^3=(b+c-a)\,t^3, \quad y^3=(c+a-b)\,t^3, \quad z^3=(a+b-c)\,t^3.$$

De donde

$$x=\sqrt[3]{b+c-a}\cdot t, \quad y=\sqrt[3]{c+a-b}\cdot t, \quad z=\sqrt[3]{a+b-c}\cdot t, \tag{4}$$

Colocando estas expresiones en la ecuación (1), hallaremos que, o $t_1=0$, o bien

$$t_2=\sqrt[3]{(b+c-a)(c+a-b)}+\sqrt[3]{(b+c-a)(a+b-c)}+\sqrt[3]{(c+a-b)(a+b-c)}$$

Colocando estos valores de t en las fórmulas (4), hallaremos dos soluciones del sistema inicial.

65. Hagamos

$$x+y=u, \quad x+z=v, \quad y+z=w.$$

Entonces, el sistema se escribe de la manera siguiente:

$$\left.\begin{aligned} u+v&=auv,\\ u+w&=buw,\\ v+w&=cvw. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es evidente, que el sistema (1) tiene la siguiente solución:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0. \tag{2}$$

Prestemos además atención a que si $u=0$, entonces, de la primera ecuación de (1) se desprende que $v=0$ y de la tercera que $w=0$. Por esta razón, nos limitaremos a examinar los casos en que

$$uvw \neq 0.$$

Del sistema (1) hallamos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v}+\frac{1}{u}&=a,\\ \frac{1}{w}+\frac{1}{u}&=b,\\ \frac{1}{w}+\frac{1}{v}&=c. \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene la misma forma que el sistema (6) en la resolución del problema 62. Empleando el mismo procedimiento, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{u}&=\frac{a+b-c}{2},\\ \frac{1}{v}&=\frac{a-b+c}{2},\\ \frac{1}{w}&=\frac{-a+b+c}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

De aquí se desprende que el sistema (1) puede tener una solución distinta de la solución (2) solamente con una condición complementaria, a saber:

$$\left.\begin{aligned} a+b-c=\alpha \neq 0, \quad a-b+c=\beta \neq 0,\\ -a+b+c=\gamma \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si se cumple la condición (4), entonces, de las fórmulas (3) deducimos que

$$u=\frac{2}{\alpha}, \qquad v=\frac{2}{\beta}, \qquad w=\frac{2}{\gamma}. \tag{5}$$

Para concluir la resolución del problema nos queda resolver dos sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0,\\ x+z&=0,\\ y+z&=0, \end{aligned}\right\} \quad (6) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2}{\alpha},\\ x+z&=\frac{2}{\beta},\\ y+z&=\frac{2}{\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

El sistema (7) surge solamente al cumplir la condición (4). Cada uno de estos sistemas tiene una sola solución; la solución del sistema (6) es:

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0,$$

y el sistema (7) tiene la solución

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}, \qquad y=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\\ z=-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Así pues, el sistema inicial tiene solamente una solución nula: $x=y=z=0$, y si se cumple la condición complementaria (4) tiene otra solución más que se determina por las fórmulas (8) y (4).

66. Por la forma de la segunda ecuación deducimos que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$. Reduciendo el primer miembro de la segunda ecuación a un común denominador, en virtud de la tercera ecuación, obtenemos:

$$xyz=27. \tag{1}$$

Multiplicando a continuación la tercera ecuación por z, tomando en consideración (1), tendremos:

$$27+(x+y)\,z^2=27z.$$

Colocando aquí $x+y=9-z$ de la primera ecuación del sistema, obtendremos:

$$z^3-9z^2+27z-27=0,$$

o

$$(z-3)^3=0.$$

Por eso, $z=3$. Colocando este valor de z en la primera ecuación y en (1), hallaremos que $x=3$ e $y=3$. Esto último podía haber sido previsto, ya que todas las incógnitas entran en las ecuaciones del sistema simétricamente. Así pues, si el sistema tiene solución, ésta puede ser únicamente la terna de números $x=3$, $y=3$ y $z=3$. Efectuando la verificación nos convencemos de que estos números forman efectivamente la solución. Así pues, el sistema tiene la solución (y, además, única):

$$x=3, \qquad y=3, \qquad z=3.$$

67. Colocando $x+y$ de la primera ecuación en la segunda, obtendremos:

$$xy+z\,(a-z)=a^2.$$

Introduciendo de aquí xy en la tercera ecuación, tendremos:

$$z^3-az^2+a^2z-a^3=0.$$

El primer miembro se descompone fácilmente en factores:

$$(z-a)(x-ai)(z+ai)=0.$$

De donde

$$z_1=a, \quad z_2=ai, \quad z_3=-ai.$$

Colocando $z=a$ en la primera y segunda ecuaciones, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0,\\ xy&=a^2. \end{aligned}\right\}$$

De aquí, $x=\pm ia$, $y=\mp ia$, además, es fácil de comprobar que las dos ternas de números (x, y, z):

$$(ia, \ -ia, \ a) \quad \text{y} \quad (-ia, \ ia, \ a)$$

satisfacen al sistema inicial. De manera análoga hallamos dos pares más de soluciones que corresponden a los valores de z_2 y z_3:

$$(a, \ -ia, \ ia), \quad (-ia, \ a, \ ia), \quad (ia, \ a, \ -ia), \quad (a, \ ia, \ -ia).$$

De este modo, al sistema lo satisfacen las seis soluciones indicadas, que son las únicas que puede tener el sistema.

Este mismo resultado puede ser obtenido por una vía más corta si se presta atención en la relación de las soluciones del sistema en cuestión con las raíces de la ecuación cúbica

$$t^3-at^2+a^2t-a^3=0. \tag{1}$$

En efecto, de acuerdo con las fórmulas de Viete (véase (2), pág. 12) las tres raíces de la ecuación (1)

$$t_1=a, \quad t_2=ia, \quad t_3=-ia,$$

enumeradas en cualquier orden, forman la solución del sistema en cuestión. De este modo, tenemos ya seis (3!) soluciones. Demostremos que estas seis soluciones son las únicas que puede tener el sistema. En efecto, supongamos que sean (x_1, y_1, z_1) cierta solución del sistema. Examinemos la ecuación de tercer grado

$$(t-x_1)(t-y_1)(t-z_1)=0, \tag{2}$$

cuyas raíces son los números x_1, y_1, z_1. Abriendo los paréntesis en la ecuación (2) y haciendo uso de las igualdades

$$\begin{aligned} x_1+y_1+z_1&=a,\\ x_1y_1+y_1z_1+x_1z_1&=a^2,\\ x_1y_1z_1&=a^3, \end{aligned}$$

nos daremos cuenta de que las ecuaciones (2) y (1) coinciden. Por consiguiente, x_1, y_1 y z_1 son las raíces de la ecuación (1), lo que se exigía demostrar. Esta observación podía haber sido empleada al resolver el problema anterior.

68. Colocando x de la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$3y^2+z^2=0. \tag{1}$$

En virtud de la tercera ecuación, de aquí se desprende que

$$3y^2-xy=0. \tag{2}$$

Por eso, o $y=0$, o bien $x=3y$.

En el primer caso ($y=0$), de acuerdo con (1), $z=0$, y, en virtud de la primera ecuación del sistema, $x=0$.

En el segundo caso, colocando x de la igualdad $x=3y$ en la segunda ecuación del sistema, obtenemos:

$$2y^2+4yz=0. \tag{3}$$

Si ahora $y=0$, obtenemos el primer caso ya examinado. Pero, si $y=-2z$, entonces, de la condición (1) se deduce que $z=0$ y, por consiguiente, $y=0$ y $x=0$. La confirmación queda demostrada.

69. De la identidad

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz), \quad (1)$$

en virtud de la primera y segunda ecuaciones del sistema, obtenemos

$$xy+xz+yz=0. \quad (2)$$

Examinemos a continuación la identidad que se obtiene al elevar el trinomio al cubo:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2. \quad (3)$$

El segundo miembro de esta identidad se puede presentar en la forma siguiente:

$$x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz+yz)+3y(xy+yz+xz)+3z^2(x+y).$$

Por consiguiente, en virtud de las ecuaciones del sistema y de la igualdad (2), de la identidad (3) se desprende que

$$3z^2(x+y)=0. \quad (4)$$

En relación con esto, examinemos dos casos:

1) Si $z=0$, entonces, de acuerdo con (2), $xy=0$. Teniendo en cuenta, a continuación, la primera ecuación del sistema, obtenemos dos conjuntos de valores:

$$x_1=a, \ y_1=0, \ z_1=0, \quad (5)$$

$$x_2=0, \ y_2=a, \ z_2=0. \quad (6)$$

En este caso, es fácil de ver que las fórmulas (5) y (6) determinan dos soluciones del sistema inicial.

2) Si $x+y=0$, entonces, de la condición (2) obtenemos de nuevo $xy=0$, y por consiguiente, $x=0$, $y=0$. De la primera ecuación del sistema se deduce que $z=a$ y obtenemos una solución más del sistema inicial:

$$x_3=0, \quad y_3=0, \quad z_3=a. \quad (7)$$

Asi pues, con la condición de que $a\neq 0$ el sistema tiene tres soluciones distintas y en el caso en que sea $a=0$ el sistema tendrá una sola solución nula.

70. Examinemos la identidad

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2. \quad (1)$$

Transformamos el segundo miembro de esta identidad a la forma

$$x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz+yz)+3y(xy+xz+yz)+3z(xy+xz+yz)-3xyz.$$

De aqui se desprende que la identidad (1) se puede escribir así:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz. \quad (2)$$

De la relación (2) se ve que para determinar la suma $x^3+y^3+z^3$ es suficiente expresar del sistema inicial $xy+xz+yz$ y xyz.

Elevando la primera ecuación al cuadrado y restándole la segunda, obtenemos

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}(a^2-b^2). \quad (3)$$

A continuación, escribamos la tercera ecuación del sistema en la forma

$$xyz=c(xy+xz+yz). \quad (4)$$

Teniendo en cuenta (3) y (4), de la identidad (2) hallamos definitivamente:

$$x^3+y^3+z^3=a^3-\frac{3}{2}a(a^2-b^2)+\frac{3}{2}c(a^2-b^2)=a^3+\frac{3}{2}(a^2-b^2)(c-a)$$

71. Abriendo los paréntesis, escribamos la segunda ecuación en la forma

$$x^2+y^2+z^2+3xy+3xz+3yz=1,$$

o bien

$$(x+y+z)^2+xy+xz+yz=1.$$

De aquí, haciendo uso de la primera ecuación del sistema, obtenemos:

$$xy+xz+yz=-3. \tag{1}$$

Presentemos la tercera ecuación del sistema en la forma

$$x(xy+xz)+y(yz+xy)+z(xz+yz)=-6.$$

Entonces, tomando en consideración a (1), tendremos

$$x(3+yz)+y(3+xz)+z(3+xy)=6,$$

o bien

$$x+y+z+xyz=2,$$

es decir,

$$xyz=0.$$

Recibimos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ xy+xz+yz&=-3,\\ xyz&=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De la última ecuación de este sistema se desprende que, por lo menos, una de las incógnitas es igual a cero. Sea que $x=0$; entonces,

$$y+z=2, \quad yz=-3,$$

de donde, o $y=3$, $z=-1$, o $y=-1$, $z=3$. De forma análoga se estudian los casos en que $y=0$ y $z=0$. De esta manera recibimos seis soluciones (x, y, z) del sistema (2):

$$(0,\ 3,\ -1),\quad (-1,\ 0,\ 3),\quad (0,\ -1,\ 3),$$
$$(3,\ -1,\ 0),\quad (3,\ 0,\ -1),\quad (-1,\ 3,\ 0).$$

Es fácil de comprobar que todos estos conjuntos de números satisfacen también al sistema inicial. Así pues, el problema tiene seis soluciones

72. Abriendo los paréntesis en las tres ecuaciones notaremos que si a la suma de las dos primeras ecuaciones le restamos la tercera, tendremos la ecuación

$$(x-y+z)^2=a-b+c. \tag{1}$$

Procediendo análogamente, hallaremos:

$$(x+y-z)^2=a+b-c, \tag{2}$$
$$(y+z-x)^2=b+c-a. \tag{3}$$

No es difícil convencerse de que también, al contrario, el sistema inicial es resultado del sistema de ecuaciones (1) (2) y (3). En efecto, sumando, por ejemplo, las ecuaciones (2) y (3), obtendremos la segunda ecuación del sistema inicial, etc. Así pues el sistema inicial y el obtenido son equivalentes. Por esta razón, es suficiente hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones (1), (2) y (3). Supongamos, para simplificar el problema, que

$$\sqrt{b+c-a}=a_1,\quad \sqrt{a-b+c}=b_1 \quad y \quad \sqrt{a+b-c}=c_1.$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (1), (2), (3) es equivalente a los ocho sistemas de primer grado siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=\pm b_1,\\ x+y-z&=\pm c_1,\\ -x+y+z&=\pm a_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Eligiendo en todos los segundos miembros el signo más, hallaremos fácilmente la siguiente solución única del sistema correspondiente:

$$x=\frac{b_1+c_1}{2},\quad y=\frac{a_1+c_1}{2},\quad z=\frac{b_1+a_1}{2}.$$

Realizando todas las posibles combinaciones con los signos en los segundos miembros, hallaremos siete soluciones más:

$$\left(\frac{-b_1+c_1}{2},\ \frac{a_1+c_1}{2},\ \frac{-b_1+a_1}{2}\right)\left(\frac{b_1-c_1}{2},\ \frac{a_1-c_1}{2},\ \frac{b_1+a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{-a_1+c_1}{2},\ \frac{b_1-a_1}{2}\right)\left(\frac{-b_1-c_1}{2},\ \frac{a_1-c_1}{2},\ \frac{-b_1+a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-b_1+c_1}{2},\ \frac{-a_1+c_1}{2},\ \frac{-b_1-a_1}{2}\right)\left(\frac{b_1-c_1}{2},\ \frac{-a_1-c_1}{2},\ \frac{b_1-a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-b_1-c_1}{2},\ \frac{-a_1-c_1}{2},\ \frac{-b_1-a_1}{2}\right).$$

Es evidente, que con las ocho soluciones indicadas se agotan todas las soluciones del sistema.

73. Escribamos la tercera ecuación del sistema en la forma

$$z^2+xy-z(x+y)=2. \tag{1}$$

Colocando aquí el valor de z^2 de la segunda ecuación y el de $z(x+y)$ de la primera, obtendremos:

$$x^2+y^2+xy-47+xy=2, \quad o \quad (x+y)^2=49.$$

De aquí

$$x+y=\pm 7. \tag{2}$$

Sumemos, a continuación, la segunda ecuación con la primera, ambos miembros de la cual los multiplicamos previamente por 2. Como resultado obtendremos:

$$(x+y)^2+2z(x+y)=94+z^2. \tag{3}$$

Examinemos ahora dos casos.

1) Supongamos al principio que en la fórmula (2) se ha elegido el signo más. Colocando entonces en (3) $x+y$ de la ecuación $x+y=7$, obtenemos que $z^2-14z+45=0$. Designando las raíces de esta ecuación con $z_1^{(1)}$ y $z_2^{(1)}$, hallaremos que $z_1^{(1)}=9$ y $z_2^{(1)}=5$. Siendo $z=9$, de la ecuación (1) se desprende que $xy=-16$. Resolviendo esta ecuación junto con $x+y=7$, hallaremos:

$$x_1^{(1)}=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\quad y_1^{(1)}=\frac{7-\sqrt{113}}{2}$$

y

$$x_2^{(1)}=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\quad y_2^{(1)}=\frac{7+\sqrt{113}}{2}.$$

Si $z=5$, entonces, de la ecuación (1) se desprende que $xy=12$. Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} xy&=12, \\ x+y&=7, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos que $x_3^{(1)}=4$, $y_3^{(1)}=3$ y $x_4^{(1)}=3$, $y_4^{(1)}=4$.

2) En el caso de que sea $x+y=-7$, procediendo análogamente, obtendremos la ecuación $z^2+14z+45=0$. Sus raíces son $z_1^{(2)}=-9$, $z_2^{(2)}=-5$. Resolviendo, a continuación, sucesivamente los dos sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} xy&=-16, \\ x+y&=-7 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

y

$$\left.\begin{aligned} xy&=12, \\ x+y&=-7, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

del sistema (4) hallaremos que

$$x_1^{(2)}=\frac{-7-\sqrt{113}}{3}, \qquad y_1^{(2)}=\frac{-7+\sqrt{113}}{2}$$

y

$$x_2^{(2)}=\frac{-7+\sqrt{113}}{2}, \qquad y_2^{(2)}=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},$$

y del sistema (5)

$$x_3^{(2)}=-4, \qquad y_3^{(2)}=-3$$

y

$$x_4^{(2)}=-3, \qquad y_4^{(2)}=-4.$$

De nuestros razonamientos se deduce que sólo pueden ser soluciones del sistema inicial los siguientes ocho ternos de números (x, y, z):

$$\left(\frac{7+\sqrt{113}}{2}, \frac{7-\sqrt{113}}{2}, 9\right), \left(\frac{7-\sqrt{113}}{2}, \frac{7+\sqrt{113}}{2}, 9\right),$$

$$(4, 3, 5), (3, 4, 5), \left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2}, \frac{-7+\sqrt{113}}{2}, -9\right),$$

$$\left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2}, \frac{-7-\sqrt{113}}{2}, -9\right), (-4, -3, -5), (-3, -4, -5).$$

Mediante la verificación nos convencemos de que todos estos ternos de números son soluciones del sistema.

74. Supongamos que sea (x, y, z) la solución real del sistema. Examinemos la primera ecuación del sistema. En virtud de la desigualdad (1) pág. 22 tenemos:

$$\frac{2z}{1+z^2}\leqslant 1$$

Entonces, de la primera ecuación se desprende que

$$x\leqslant z. \qquad (1)$$

Análogamente, de la segunda y tercera ecuaciones del sistema obtenemos que

$$y\leqslant x, \qquad (2)$$

$$z\leqslant y. \qquad (3)$$

El sistema de desigualdades (1)—(3) se satisface solamente en el caso en que

$$x = y = z \tag{4}$$

Colocando $z = x$ en la primera ecuación, hallamos que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

De (4) hallamos definitivamente que el sistema tiene dos soluciones reales (0, 0, 0) y (1, 1, 1).

75. Supongamos que sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las soluciones reales del sistema. Los números x_k ($k = 1, \ldots, n$), por lo visto, deberán ser de un mismo signo. Supongamos para mayor certeza, que todos $x_k > 0$ (en caso contrario podríamos cambiar el signo en todas las ecuaciones del sistema).
Demostremos que

$$x_k \geqslant \sqrt{2}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

En efecto, en virtud de la desigualdad (1) pág. 22

$$x_k + \frac{2}{x_k} \geqslant 2\sqrt{x_k \cdot \frac{2}{x_k}} = 2\sqrt{2}.$$

En virtud de las ecuaciones del sistema, de aquí se desprende la desigualdad (1).
Sumando ahora todas las ecuaciones del sistema, obtenemos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{2}{x_n}. \tag{2}$$

Con la condición (1), la igualdad aquí es posible solamente en el caso cuando todas las incógnitas son iguales a $\sqrt{2}$. Puesto que es fácil de comprobar que el conjunto de números $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt{2}$ satisface al sistema inicial, entonces, el sistema tiene solución positiva y, además, solamente una. Cambiando los signos en los valores de las incógnitas, obtendremos una solución real más

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\sqrt{2}.$$

Así pues, con estas dos soluciones se agotan todas las soluciones reales.

76. Sean x, y, z las soluciones del sistema. Expresando x por su valor de la primera ecuación y colocándolo en la segunda y tercera, hallaremos.

$$(a-b) + (c-b)\,y + (d-b)\,z = 0,$$
$$(a^2+b^2) + (c^2-b^2)\,y + (d^2-b^2)\,z = 0.$$

De aquí, por medio de cómputos simples, hallamos:

$$y = -\frac{(a-b)(a-d)}{(c-b)(c-d)}, \qquad z = -\frac{(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}.$$

Colocando los valores hallados de y y z en la primera igualdad, obtenemos:

$$x = -\frac{(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}.$$

Por consiguiente,

$$xyz = \frac{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2}{(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2} > 0.$$

77. Si $a \neq 0$, entonces $x = a$ no es una raíz de la ecuación. Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $\sqrt[3]{(a-x)^2}$, la sustituimos por la siguiente ecuación

equivalente:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Haciendo $t=\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$, hallaremos que $t_1=4$, $t_2=1$. De aquí $x_1=\frac{63}{65}a$, $x_2=0$.

Si $a=0$, entonces, la ecuación inicial tiene una sola raíz $x=0$.

78. Por sustitución nos convencemos de que $x=1$ no es una raíz. Por eso, después de dividir ambos miembros de la ecuación por $\sqrt[m]{(1-x)^2}$ ésta pasa a una ecuación equivalente:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}-1=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Designando $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$ por t, obtendremos la ecuación $t^2-1=t$, o $t^2-t-1=0$. De aquí $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Puesto que el segundo valor es negativo, entonces, en virtud del acuerdo aceptado sobre las raíces, cuando el exponente m es par debemos omitir t_2. De este modo, en el caso cuando m es par, tenemos

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+x}{1-x}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

y, por consiguiente,

$$x=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m+1}.$$

Cuando m es impar la ecuación tiene dos raíces:

$$x_{1,2}=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m+1}.$$

79. Hagamos la sustitución $\sqrt{2y-5}=t\geqslant 0$. Como resultado obtendremos

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14$$

De aquí $t+1+t+3=14$ y $t=5$. Resolviendo la ecuación

$$\sqrt{2y-5}=5,$$

hallamos que $y=15$.

80. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, obtendremos

$$x-\sqrt{x^2-x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}. \qquad (1)$$

Puesto que $x>0$ (siendo $x=0$ el segundo miembro de la ecuación inicial pierde el sentido), entonces, la ecuación (1) es equivalente a la ecuación

$$2\sqrt{x}-1=2\sqrt{x-1}.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado nos convencemos de que esta ecuación tiene una sola raiz $x=\frac{25}{16}$, que satisface también a la ecuación inicial.

81. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\sqrt{x+1}$, hacemos $x^2+8x=t$. Entonces, obtendremos la ecuación

$$\sqrt{t}+\sqrt{t+7}=7.$$

Esta ecuación tiene una sola raíz $t=9$. Resolviendo a continuación la ecuación $x^2+8x-9=0$, hallaremos que $x_1=-9$, $x_2=1$. En virtud de la condición adoptada respecto a los valores de las raices, la ecuación inicial queda satisfecha solamente siendo $x=1$.

82. Elevando ambos miembros de la ecuación al cubo, obtendremos.

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}+x+1=2x^3.$$

De aquí

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right)=2x^3. \qquad (1)$$

y en razón de la ecuación inicial

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\,x\sqrt[3]{2}=2x^3. \qquad (2)$$

Despues de simples transformaciones obtenemos.

$$x\sqrt[3]{x^2-1}\left[3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right]=0.$$

De aquí hallamos todos los números que pueden servir de raíces de la ecuación inicial. Tenemos directamente:

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=-1.$$

Resolviendo a continuación la ecuación

$$3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{(x^2-1)^2},$$

hallaremos.

$$27=4(x^2-1)^2, \quad (x^2-1)^2=\frac{27}{4}, \quad x^2=1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Puesto que se buscan solamente las raíces reales entonces, por consiguiente,

$$x^2=1+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

De aquí $x_4=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$, $x_5=-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Es fácil comprobar, por medio de la sustitución, que x_1, x_2 y x_3 son raíces de la ecuación inicial. La verificación directa de los valores de x_4 y x_5 causa ciertas dificultades. Por eso, procedemos de la siguiente manera.
Hagamos

$$a=\sqrt[3]{x_4-1}, \quad b=\sqrt[3]{x_4+1}$$

y

$$c=\sqrt[3]{2x_4}$$

y demostremos que

$$a+b=c. \qquad (3)$$

Puesto que x_4 satisface a la ecuación (2), tendremos que

$$a^3+3abc+b^3=c^3, \tag{4}$$

y deberemos demostrar que de (4) se desprende (3). Notemos que si en la ecuación (4), en vez de c ponemos $a+b$, obtendremos una identidad. Por consiguiente, por el teorema de Bezu, el polinomio $c^3-3abc-a^3-b^3$ examinado respecto a c es múltiplo del binomio $c-(a+b)$. Efectuando la división tendremos que

$$c^3-3abc-a^3-b^3=[c-(a+b)]\left\{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2\right\} \tag{5}$$

En virtud de (4), el segundo miembro de (5) es igual a cero, sin embargo, es fácil de ver que $a>0$, $b>0$, $c>0$, y por lo tanto, la expresión entre llaves es positiva. Así pues, la igualdad (3) queda demostrada. En análoga forma se establece que x_5 es también una raíz de la ecuación inicial.

83. Pasando $\sqrt{x}$ al primer miembro y elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado, obtenemos que

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$$

Elevando, a continuación, ambos miembros de esta ecuación al cuadrado hallaremos que $x=\frac{a^2}{4}$ es la única raíz posible de la ecuación. Colocándola en la ecuación obtenemos que

$$\sqrt{a^2-16a+64}=2\sqrt{a^2-8a+16}-\sqrt{a^2},$$

o, en virtud de que los radicales son positivos,

$$|a-8|=2|a-4|-|a|. \tag{1}$$

Siendo $a\geqslant 8$ la igualdad (1) se cumple. Por consiguiente, con esta condición, la raíz de la ecuación inicial es $x=\frac{a^2}{4}$. Siendo $4\leqslant a<8$, la condición (1) no se cumple, puesto que

$$8-a\neq 2(a-4)-a.$$

Siendo $0\leqslant a<4$, la condición (1) adquiere la forma

$$8-a=2(4-a)-a$$

y se cumple solamente siendo $a=0$. Por fin, siendo $a<0$ la condición (1) se transforma en el identidad $8-a=2(4-a)+a$. Por consiguiente, para $a\geqslant 8$ y $a\leqslant 0$ la ecuación tiene la única raíz

$$x=\frac{a^2}{4}.$$

Para $0<a<8$ la ecuación no tiene raíces.

84. Elevemos ambos miembros de la primera ecuación al cuadrado y coloquemos en la ecuación obtenida x^2+y^2 de la segunda ecuación. Como resultado tendremos:

$$36xy-1=\sqrt{-\frac{11}{5}+64xy+256(xy)^2}.$$

Elevando de nuevo ambos miembros de la ecuación al cuadrado, obtendremos una ecuación cuadrada respecto a $t=xy$:

$$650t^2-85t+2=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallaremos que $t_1=\frac{1}{10}$, $t_2=\frac{2}{65}$. Ahora, examinemos dos sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+4xy&=\frac{1}{5},\\ xy&=\frac{1}{10}, \end{aligned}\right\}\quad (1)\qquad\qquad \left.\begin{aligned} x^2+y^2+4xy&=\frac{1}{5},\\ xy&=\frac{2}{65}, \end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Por lo visto, todas las soluciones del sistema inicial entran en las soluciones de estos sistemas.

Resolviendo el sistema (1) hallamos:

$$(x+y)^2=\frac{1}{5}-2xy=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=0.$$

Por consiguiente, $x+y=0$, y obtenemos dos soluciones del sistema (1):

$$x_1=\frac{i}{\sqrt{10}},\quad y_1=-\frac{i}{\sqrt{10}},\qquad x_2=-\frac{i}{\sqrt{10}},\quad y_2=\frac{i}{\sqrt{10}}$$

Transformando la primera ecuación del sistema (2) a la forma $(x+y)^2=\frac{9}{65}$ este último se reduce a los dos sistemas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-\frac{3}{\sqrt{65}},\\ xy&=\frac{2}{65}, \end{aligned}\right\}\quad (2')\qquad\qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-\frac{3}{\sqrt{65}},\\ xy&=\frac{2}{65}. \end{aligned}\right\}\quad (2'')$$

El sistema (2') tiene dos soluciones:

$$x_3=\frac{2}{\sqrt{65}},\quad y_3=\frac{1}{\sqrt{65}};\quad x_4=\frac{1}{\sqrt{65}},\quad y_4=\frac{2}{\sqrt{65}}$$

El sistema (2'') también tiene dos soluciones.

$$x_5=\frac{2}{\sqrt{65}},\quad y_5=-\frac{1}{\sqrt{65}};\quad x_6=-\frac{1}{\sqrt{65}},\quad y_6=-\frac{2}{\sqrt{65}}.$$

Como es fácil de comprobar, solamente los conjuntos de números primero, segundo, tercero y sexto satisfacen al sistema inicial. Por lo tanto, el sistema inicial tiene sólo cuatro soluciones.

85. Hagamos

$$\sqrt[3]{x}=u,\quad \sqrt[3]{y}=v$$

Entonces, el sistema dado se escribe en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &u^3-v^3=\frac{7}{2}(u^2v-uv^2),\\ &u-v=3. \end{aligned}\right\}$$

Transformemos la primera ecuación a la forma

$$(u-v)^2+3uv=\frac{7}{2}uv.$$

De aquí

$$uv=18$$

Resolviendo esta última ecuación junto con la segunda ecuación del sistema hallaremos que $u_1=6$, $v_1=3$; $u_2=-3$, $v_2=-6$. Volviendo al sistema inicial obtendremos sus dos soluciones:

$$x_1=216, \quad y_1=27, \quad x_2=-27, \quad y_2=-216.$$

86. Por medio de la sustitución $\sqrt{\frac{x}{y}}=t\geqslant 0$ transformemos la primera ecuación a la forma

$$2t^2-3t-2=0.$$

De aquí se desprende que $t=2$ $\left(\text{omitimos la segunda raíz } -\frac{1}{2}\right)$. Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}}&=2,\\ x+xy+y&=9,\end{aligned}\right\}$$

hallaremos sus dos soluciones:

$$x_1=4, \quad y_1=1; \quad x_2=-9, \quad y_2=-\frac{9}{4},$$

que son también las soluciones del sistema inicial. Así pues, el sistema inicial tiene dos soluciones.

87. Hagamos

$$\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=t>0.$$

Entonces, la primera ecuación adquiere la forma

$$t^2-3t+2=0,$$

de donde $t_1=1$, $t_2=2$.

Examinemos ahora dos sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}&=1,\\ x+xy+y&=7,\end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}&=2,\\ x+xy+y&=7\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

El sistema (1) tiene dos soluciones

$$(-5, \ -3), \quad (3, \ 1).$$

El sistema (2) tiene también dos soluciones:

$$\left(\sqrt{10}-1, \ \frac{\sqrt{160}-5}{5}\right), \quad \left(-\sqrt{10}-1, \ \frac{-\sqrt{160}-5}{5}\right).$$

Por consiguiente, el sistema inicial tiene cuatro soluciones.

88. Tomando en consideración que

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{1}{|x-y|}\sqrt{x^2-y^2},$$

y multiplicando la primera ecuación por $x-y$, obtendremos

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0 \text{ siendo } x-y>0$$

y

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0 \text{ siendo } x-y<0.$$

De aquí

$$(\pm\sqrt{x^2-y^2})_1=4, \quad (\pm\sqrt{x^2-y^2})_2=-3.$$

En relación con esto examinemos dos sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=16,\\ xy&=15,\end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} x^2-y^2&=9,\\ xy&=15.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

El sistema (1) tiene dos soluciones reales:

$$x_1=5, \quad y_1=3; \quad x_2=-5, \quad y_2=-3.$$

El sistema (2) tiene también dos soluciones reales.

$$x_3=\sqrt{\frac{9+\sqrt{981}}{2}}, \quad y_3=\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}};$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{9+\sqrt{981}}{2}} \quad y_4=-\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}.$$

Sin embargo, no es difícil comprobar que sólo dos de los pares de números hallados satisfacen al sistema inicial, a saber:

$$(5, \ 3), \ \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}}, \ -\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}\right).$$

Así pues, el sistema inicial tiene dos soluciones reales

89. Hagamos

$$\sqrt{x^2-12y+1}=t$$

Entonces, la primera ecuación se puede escribir en la forma

$$t^2-8t+16=0.$$

De aquí $t_{1,2}=4$ y obtenemos

$$x^2-12y=15 \qquad (1)$$

Notando en adelante que $y\neq 0$, multipliquemos la segunda ecuación por $\frac{2x}{y}$, como resultado adquirirá la forma

$$\left(\frac{x}{2y}\right)^2-2\left(\frac{x}{2y}\right)\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}+\left(1+\frac{4x}{3y}\right)=0.$$

De aquí

$$\frac{x}{2y}-\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}=0 \qquad (2)$$

Después de elevarla al cuadrado obtenemos la ecuación

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2-16\left(\frac{x}{y}\right)-12=0,$$

de la que hallamos que

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1=6, \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2=-\frac{2}{3}.$$

El segundo valor, por lo visto, no satisface a la ecuación (2), por lo tanto, podemos limitarnos al examen del sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2-12y=15,\\ \frac{x}{y}=6 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene dos soluciones $\left(5,\ \frac{5}{6}\right)$, $\left(-3,\ -\frac{1}{2}\right)$, que, como es fácil de comprobar, satisfacen también al sistema inicial.

90. Liberando la primera ecuación de la irracionalidad en los denominadores, obtendremos:

$$\frac{4x^2-2y^2}{y^2}=\frac{17}{4}.$$

De aquí

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1=\frac{5}{4} \quad \text{y} \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2=-\frac{5}{4}.$$

Hagamos en la segunda ecuación

$$\sqrt{x^2+xy+4}=t, \tag{1}$$

después de lo cual se puede escribir en la forma siguiente:

$$t^2+t-56=0.$$

De aquí $t_1=7$, $t_2=-8$. Ya que en (1) $t\geqslant 0$, omitimos la segunda raíz. Como resultado obtenemos los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{5}{4}y,\\ x^2+xy-45=0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x=-\frac{5}{4}y,\\ x^2+xy-45=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Las soluciones del sistema (2) son: (5, 4), (-5, -4). Las del sistema (3) son: (15, -12), (-15, 12). Las cuatro soluciones satisfacen también al sistema inicial.

91. Expresando x por su valor de la segunda ecuación y colocándolo en la primera, obtendremos

$$y^2+\sqrt{3y^2-\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,\frac{2y+5}{3}+5$$

Haciendo aquí $\sqrt{\frac{9y^2-4y-1}{3}}=t\geqslant 0$, obtenemos la ecuación

$$t^2+3t-18=0.$$

De aquí

$$t_1=3,\quad t_2=-6.$$

Puesto que según la condición t no es negativa, tenemos solamente una ecuación

$$9y^2-4y-28=0.$$

Resolviendo esta ecuación junto con la segunda ecuación del sistema inicial, hallaremos sus dos soluciones

$$x_1=3,\quad y_1=2,\qquad x_2=\frac{17}{27},\quad y_2=-\frac{14}{9}.$$

92. Hagamos

$$\sqrt{x^2-6y+1}=t\geqslant 0$$

Entonces, la primera ecuación se escribirá en la forma

$$t^2-8t+16=0$$

De aquí $t=4$ y tenemos

$$x^2-6y-15=0 \tag{1}$$

Si ahora hacemos en la segunda ecuación $x^2y=u$ y se toma en consideración (1), obtendremos la ecuación

$$9u^2-241u-13\,230=0,$$

de donde $u_1=54$, $u_2=-\dfrac{245}{9}$.

Obtenemos dos sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2-6y-15=0,\\ x^2y=54,\end{aligned}\right\}\quad(2)\qquad\qquad \left.\begin{aligned} x^2-6y-15=0,\\ x^2y=-\frac{245}{9},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Eliminando en el sistema (2) x^2, obtendremos la ecuación

$$2y^2+5y-18=0,$$

de donde $y_1=2$, $y_2=-4\dfrac{1}{2}$. La segunda raíz se omite, puesto que, en virtud de la ecuación $x^2y=54$, conduce a valores de x irreales. Por consiguiente, el sistema (2) tiene dos soluciones reales:

$$x_1=\sqrt{27},\quad y_1=2;\qquad x_2=-\sqrt{27},\quad y_2=2$$

El sistema (3) se reduce a la ecuación

$$54y^2+135y+245=0,$$

que no tiene soluciones reales. Así pues, el sistema inicial tiene dos soluciones reales.

93. Hagamos

$$\sqrt{x}=u\geqslant 0\qquad \sqrt{y}=v\geqslant 0 \tag{1}$$

Entonces el sistema se escribirá de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned}(u^2-v^2)\,v=\frac{u}{2},\\ (u^2+v^2)\,u=3v\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

El sistema (2) tiene la solución evidente

$$u=0,\qquad v=0. \tag{3}$$

Considerando a continuación que $u\neq 0$ y, por consiguiente, (en virtud de las ecuaciones) $v\neq 0$, multiplicando los primeros y segundos miembros de las ecuaciones (2) entre sí, obtendremos:

$$u^4-v^4=\frac{3}{2}. \tag{4}$$

Multipliquemos a continuación la primera ecuación del sistema (2) por v y la segunda por u y sumémoslas, como resultado obtendremos.

$$u^4 - v^4 + 2u^2v^2 = \frac{7}{2}uv.$$

En virtud de (4) tenemos:

$$4(uv)^2 - 7uv + 3 = 0 \tag{5}$$

De aquí

$$(uv)_1 = 1, \quad (uv)_2 = \frac{3}{4}$$

Examinemos ahora dos sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} uv = 1, \\ (u^2+v^2)\,u = 3v, \end{array}\right\} \quad (6) \qquad \left.\begin{array}{l} uv = \frac{3}{4}, \\ (u^2+v^2)\,u = 3v \end{array}\right\} \quad (7)$$

Es evidente que toda solución del sistema (2) diferente de la (3), se encontrará entre las soluciones de estos sistemas.

Multiplicando la segunda ecuación del sistema (6) por u, en virtud de la primera ecuación, hallaremos que $u^4 = 2$, de aquí, tomando en consideración (1), obtenemos:

$$u = \sqrt[4]{2}, \quad v = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Análogamente hallamos la solución del sistema (7) que satisface la condición (1):

$$u = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \quad v = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$$

Es fácil de comprobar que las dos soluciones satisfacen también al sistema (2). Así pues, el sistema inicial tiene tres soluciones:

$$(0,\ 0); \quad \left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

94. Elevando ambos miembros de la primera ecuación al cuadrado, obtendremos:

$$\sqrt{x^2 - y^2} = x - \frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

En virtud de la segunda ecuacion tenemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3a^2}{2} - x. \tag{2}$$

Elevando ahora ambos miembros de la segunda ecuación del sistema inicial al cuadrado, obtendremos:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{a^4}{2} - x^2$$

De aquí, en virtud de (1) y (2)

$$\frac{a^4}{2} - x^2 = \left(x - \frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3a^2}{2} - x\right).$$

Abriendo los paréntesis, hallaremos que $x = \frac{5}{8}a^2$. A continuación, de la ecuación (1) hallaremos fácilmente dos valores de y:

$$y_1 = a^2\sqrt{\frac{3}{8}}; \quad y_2 = -a^2\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Por medio de la comprobación descubrimos que el sistema inicial tiene sólo una solución $\left(\frac{5}{8}a^2,\ a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

95. Hagamos

$$\sqrt{x}=u\geqslant 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{y}=v\geqslant 0. \tag{1}$$

Entonces, el sistema adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} u^3-v^3&=a(u-v),\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Este sistema se descompone evidentemente en dos sistemas:

$$\left.\begin{aligned} u-v&=0,\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2, \end{aligned}\right\} \quad (2') \quad \text{y}$$

$$\left.\begin{aligned} u^2+uv+v^2&=a,\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2. \end{aligned}\right\} \quad (2'')$$

Resolviendo el sistema (2′) hallamos que $3u^4=b^2$, de donde, teniendo en cuenta (1), obtenemos:

$$u=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt[4]{27}}{3}, \quad v=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt[4]{27}}{3}. \tag{3}$$

Pasando al sistema (2″), transformemos ambas ecuaciones de la forma siguiente:

$$u^2+v^2=a-uv, \quad (u^2+v^2)^2=b^2+u^2v^2.$$

De aquí hallamos uv y u^2+v^2:

$$\left.\begin{aligned} uv&=\frac{a^2-b^2}{2a},\\ u^2+v^2&=\frac{a^2+b^2}{2a}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

No es difícil demostrar que el sistema de ecuaciones (4) es equivalente al sistema (2″). De las ecuaciones (4) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} (u+v)^2&=\frac{3a^2-b^2}{2a},\\ (u-v)^2&=\frac{3b^2-a^2}{2a}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Prestemos atención a que el segundo miembro de la primera ecuación del sistema (4), en virtud de (1), deberá ser positivo; también deberá ser positivo el segundo miembro de la segunda ecuación del sistema (5). De este modo, deberemos suponer cumplida la condición

$$3b^2\geqslant a^2\geqslant b^2, \tag{6}$$

en caso contrario el sistema (5), y junto con él también el sistema (2″), no tiene soluciones que satisfagan la condición (1).

Resolviendo el sistema (5), obtenemos:

$$u+v=\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}, \quad u-v=\pm\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}.$$

Como resultado tenemos:

$$u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}\pm\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}\mp\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right).$$

Es fácil de ver que, en virtud de la condición (6), los dos pares de valores (u, v) no son negativos; en efecto, ya que $a^2 \geqslant b^2$, entonces $3a^2-b^2 \geqslant 3b^2-a^2$

Así pues, cuando se cumple la condición complementaria (6), el sistema inicial tiene tres soluciones:

$$x_1=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad y_1=\frac{b}{\sqrt{3}};$$

$$x_2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}+\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2,$$

$$y_2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}-\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2;$$

$$x_3=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}-\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2,$$

$$y^3=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}+\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2;$$

si se perturba la condición (6), sólo la primera de ellas.

3. Desigualdades algebraicas

96. Para que el trinomio cuadrado

$$ax^2+bx+x \qquad (a \neq 0)$$

sea positivo para todos los valores de x, es necesario y suficiente que $a > 0$ y que el discriminante D del trinomio sea negativo. En nuestro caso tenemos

$$a=r^2-1>0; \tag{1}$$

$$D=4(r-1)^2-4(r^2-1)=-8(r-1)<0. \tag{2}$$

Las desigualdades (1) y (2) se cumplen simultáneamente cuando $r > 1$. Señalemos además, que si $r=1$ el trinomio examinado en el problema es idénticamente igual a 1.

Así pues, todos los valores buscados de r se determinan por la desigualdad

$$r \geqslant 1.$$

97. Si hacemos

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=u$$

y notamos que $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=u^2-2$, entonces, la expresión dada se transforma fácilmente en la forma

$$3u^2-8u+4. \tag{1}$$

Si x e y tienen distintos signos, entonces, $u<0$ y el trinomio (1) es positivo. Si x e y son de signos iguales, entonces, es fácil ver que $u \geqslant 2$.

Puesto que las raíces del trinomio cuadrado (1) son iguales a $\frac{2}{3}$ y 2, para $u \geqslant 2$ el trinomio no es negativo. Así pues, siendo $u < 0$ y $u \geqslant 2$, el trinomio no es negativo y, por lo tanto, la expresión inicial no es negativa para cualesquiera valores de x e y reales y no iguales a cero.

98. Notemos que $x^2 - x + 1 > 0$ para todos los valores de x, puesto que el discriminante del trinomio cuadrado es igual a $-3 < 0$ y el coeficiente de x^2 es positivo, por esta razon, tenemos derecho a multiplicar ambas desigualdades por el denominador. Como resultado obtendremos:

$$3x^2 + 3x - 3 < x_2 + ax - 2,$$
$$x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2,$$

o bien

$$4x^2 + (a-3)x + 1 > 0,$$
$$x^2 - (a+2)x + 4 > 0.$$

La primera desigualdad es justa para todos los valores de x solamente cuando el discriminante del trinomio cuadrado es menor que cero, es decir, cuando $(a-3)^2 - 16 < 0$. Por razón análoga la segunda desigualdad se cumple con la condición de que sea

$$(a+2)^2 - 16 < 0$$

Resolviendo conjuntamente las dos desigualdades $(a-3)^2 - 16 < 0$ y $(a+2)^2 - 16 < 0$ respecto a a, obtenemos

$$-4 < a - 3 < 4, \quad -1 < a < 7$$

y

$$-4 < a + 2 < 4, \quad -6 < a < 2.$$

De aquí tenemos definitivamente que $-1 < a < 2$.

99. En virtud de la desigualdad (1) pág. 22 tenemos que

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2, \quad c^4 + d^4 \geqslant 2c^2d^2.$$

Sumando estas desigualdades obtenemos que

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 2(a^2b^2 + c^2d^2) \tag{1}$$

De acuerdo con la desigualdad (3) pág. 22, haciendo $u = a^2b^2$ y $v = c^2d^2$, tenemos que

$$a^2b^2 + c^2d^2 \geqslant 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2} \tag{2}$$

Puesto que siempre $\sqrt{a^2b^2c^2d^2} \geqslant abcd$ (el signo $>$ para el caso cuando sea $abcd < 0$), entonces, confrontando (1) y (2) llegamos a la demostración de la desigualdad propuesta.

100. El sistema dado es equivalente al siguiente:

$$x^2 + (x+a)^2 + 2x \leqslant 1, \quad y = x + a$$

La desigualdad

$$2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 \leqslant 0$$

tiene la única solución respecto a x solamente cuando el discriminante del trinomio es igual a cero:

$$(a+1)^2 - 2(a^2 - 1) = 0,$$

es decir,

$$a^2 - 2a - 3 = 0;$$

de aquí

$$a_1=3, \quad a_2=-1.$$

1) Si $a=3$, entonces, $x^2+4x+4=0$ y $x=-2$, $y=1$

2) Cuando $a=-1$, $x^2=0$ y $x=0$, $y=-1$.

101 Escribamos el sistema de desigualdades dado en la forma siguiente

$$y+\frac{1}{2}>|x^2-2x|,$$

$$y<2-|x-1|.$$

Puesto que siempre $|x^2-2x|\geqslant 0$ y $|x-1|\geqslant 0$, entonces

$$-\frac{1}{2}<y<2.$$

Los únicos números enteros de y que satisfacen a esta desigualdad son 0 y 1. Por consiguiente, el sistema de desigualdades dado, examinado para los valores enteros de x e y, puede ser conjunto solamente para los valores $y=0$ e $y=1$. Examinemos ambos casos.

Primer caso. Si $y=0$, el sistema de desigualdades toma la forma

$$|x^2-2x|<\frac{1}{2}, \quad |x-1|<2.$$

A la segunda de estas desigualdades la satisfacen solamente los números enteros: 0, 1 y 2. Por sustitución es fácil convencerse de que 0 y 2 satisfacen también a la primera desigualdad, pero 1 no la satisface. Así pues, para el caso $y=0$ se han hallado dos soluciones:

$$x_1=0, \quad y_1=0, \qquad x_2=2, \quad y_2=0$$

Segundo caso. Si $y=1$, el sistema de desigualdades inicial conduce al sistema siguiente:

$$|x^2-2x|<\frac{3}{2}, \; |x-1|<1.$$

A la segunda de estas desigualdades la satisface el único número entero $x=1$, que satisface también a la primera. Por consiguiente, en este caso tenemos una solución más del problema: $x_3=1$, $y_3=1$. Así pues, el sistema de desigualdades se satisface con tres pares de números enteros.

102. En la parte izquierda de la desigualdad hay solamente n sumandos y, además, los primeros $n-1$ sumandos son estrictamente mayores que el último. Por eso

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

103. Designemos la parte izquierda de la desigualdad a demostrar por S_m. Es fácil ver que en este caso

$$S_{m+1}-S_m=\frac{1}{3m+4}+\frac{1}{3m+3}+\frac{1}{3m+2}-\frac{1}{m+1}$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, hallaremos:

$$S_{m+1}-S_m=\frac{2}{(3m+2)(3m+3)(3m+4)}>0.$$

Así pues, $S_{m+1}>S_m$ Puesto que

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1,$$

Por lo tanto
$$S_m > S_{m-1} > \ldots > S_2 > S_1 > 1,$$
es decir, $S_m > 1$, lo que se exigía demostrar.

104. Escribamos una serie de desigualdades evidentes:
$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
Sumando estas desigualdades miembro a miembro, obtendremos:
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$
lo que se exigía demostrar.

105. Escribamos ambas partes de la desigualdad a demostrar en la forma siguiente:
$$(n!)^2 = \underbrace{(1\cdot n)\,[2\cdot(n-1)]\ldots[k\,(n-k+1)]\ldots(n\cdot 1)}_{n \text{ factores}},$$
$$n^n = \underbrace{n\cdot n\,\ldots\, n}_{n \text{ factores}}.$$
Demostremos que
$$(n-k+1)\,k \geqslant n \tag{1}$$
para $n \geqslant k \geqslant 1$. En efecto,
$$nk-k^2+k-n = k\,(n-k)-(n-k) = (n-k)\,(k-1) \geqslant 0. \tag{2}$$
De este modo, ya hemos demostrado que
$$(n!)^2 \geqslant n^n. \tag{3}$$
Notemos que si el número k es mayor que la unidad y menor que n, en la fórmula (1), como se deduce de (2), tiene lugar una desigualdad estricta. Esto, por lo visto, trae consigo una desigualdad estricta en la fórmula (3). Para $n > 2$ este número k puede ser hallado. Por consiguiente, en este caso, es justa la desigualdad estricta $(n!)^2 > n^n$.

106. Es fácil comprobar que para la construcción de un triángulo con los lados a, b y c, es necesario y suficiente que estos números a, b y c satisfagan a las tres desigualdades siguientes:
$$\left.\begin{aligned} a+b-c>0,\\ a+c-b>0,\\ b+c-a>0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$
Demostremos que el cumplimiento simultáneo de estas desigualdades es equivalente al cumplimiento de la condición puesta en el problema. Admitamos que sea
$$K = pa^2+qb^2-pqc^2.$$

Puesto que $q=1-p$, la expresión anterior se puede escribir en la forma

$$K=pa^2+(1-p)b^2-p(1-p)c^2=c^2p^2+(a^2-b^2-c^2)p+b^2,$$

donde a, b y c son constantes y p puede tomar cualesquiera valores.

Así pues, K representa un trinomio cuadrado con relación a p. En el caso general, según sea la magnitud de p, el trinomio K puede tomar valores de diferentes signos. La desigualdad indicada en el problema es equivalente a que $K>0$ para todos los valores de p. Para esto, como es conocido, es necesario y suficiente que el discriminante del trinimio

$$D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$

sea negativo (hemos tomado en consideración que el coeficiente de p^2 es igual a $c^2>0$).

El discriminante puede ser presentado en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}D&=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=\\&=(a^2-b^2-c^2-2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)=[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]=\\&=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)=\\&=-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

Si el triángulo puede ser construido, entonces, las desigualdades (1) se han cumplido y, por consiguiente, $D<0$. Con esto, en el sentido directo la confirmación queda demostrada.

En el sentido inverso, si $D<0$, entonces,

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0. \tag{2}$$

Demostremos que de aquí se desprenden las tres desigualdades (1). En efecto, supongamos que sólo uno de los paréntesis de la parte izquierda de (2) es positivo y los dos restantes son negativos, por ejemplo $a+b-c<0$ y $b+c-a<0$. Sumando estas desigualdades obtenemos que $2b<0$, lo cual es imposible. De este modo, la confirmación queda demostrada en sentido inverso.

107. Transformemos la parte izquierda de la desigualdad de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}4(x+y)(x+z)x(x+y+z)+y^2z^2&=4(x^2+xy+xz+yz)(x^2+xy+xz)+y^2z^2=\\&=4(x^2+xy+xz)^2+4yz(x^2+xy+xz)+y^2z^2=[2(x^2+xy+xz)+yz]^2.\end{aligned}$$

La expresión obtenida no es negativa para cualesquiera x, y y z reales, lo que se exigía demostrar.

108. Designando la parte izquierda de la desigualdad por z, transformemos z de la siguiente manera:

$$z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4=(x+y+1)^2+2(y+1)^2+1.$$

Si x e y son reales, los dos primeros sumandos no son negativos y, por lo tanto, $z\geqslant 1$.

109. Puesto que $x=\dfrac{1-4y}{2}$, entonces, la desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2\geqslant\frac{1}{20},$$

que se transforma fácilmente a la siguiente desigualdad evidente:

$$100y^2-40y+4=(10y-2)^2\geqslant 0.$$

110. Ya que $d>0$ y $R\geqslant r>0$, entonces,

$$d^2+R^2-r^2>0 \quad \text{y} \quad 2dR>0.$$

Por consiguiente esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$d^2+R^2-r^2\leqslant 2dR$$

Reduciéndola a la forma $(d-R)^2\leqslant r^2$, obtendremos $|d-R|\leqslant r$ ó $-r\leqslant d-$ $-R\leqslant r$. Por consiguiente,

$$R-r\leqslant d\leqslant R+r$$

111. Multiplicando ambas partes de la desigualdad a demostrar por $a+b+c$, obtendremos una desigualdad equivalente cuya parte izquierda es igual a

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=$$

$$=9+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2\geqslant 9.$$

112. Notemos que la desigualdad dada se reduce a cero cuando $b=c$, $c=a$ y $a=b$. Por esta razón, por el teorema de Bezu, se divide sin resto por las diferencias $a-b$, $a-c$ y $b-c$. Disponiendo los sumandos según las potencias decrecientes de a y dividiendo entre $a-b$, obtendremos:

$$a^3(b^2-c^2)+a^2(c^3-b^3)+b^3c^2-c^3b^2=$$
$$=(a-b)[a^2(b^2-c^2)+ac^2(c-b)+bc^2(c-b)].$$

Saquemos a continuación de la expresión entre corchetes el factor $(b-c)$ y dividamos el polinomio que queda entre $a-c$. Como resultado obtendremos:

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=-(b-a)(c-b)(c-a)(ac+bc+ab)$$

Puesto que por la condición $a<b<c$ y a, b y c son de un mismo signo, la expresión a la derecha es negativa.

113. Tenemos:

$$1-2\sqrt{a_k}+a_k=(1-\sqrt{a_k})^2\geqslant 0,$$

de donde

$$1+a_k\geqslant 2\sqrt{a_k}.$$

Escribiendo estas desigualdades para $k=1, 2, \ldots$ y multiplicándolas miembro a miembro, obtendremos:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}=2^n$$

114. Es suficiente examinar el caso cuando a y b son de un mismo signo (es decir, son positivos), puesto que en el caso contrario uno de estos números es mayor que 1 y la desigualdad es evidente.

Tenemos:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab.$$
$$a^4+b^4=(1-2ab)^2-2a^2b^2.$$

Pero si $a+b=1$, entonces, $0\leqslant ab\leqslant\frac{1}{4}$, puesto que

$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(véase la fórmula (3) en la pág. 22).

Por consiguiente,

$$a^4+b^4\geqslant\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}.$$

115. Examinemos tres casos

1) $x \leqslant 0$; entonces, $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$, puesto que los cuatro primeros sumandos no son negativos;

2) $0 < x < 1$: transformemos el polinomio a la forma

$$x^8 + (x^2 - x^5) + (1 - x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)$$

Aquí, por lo visto, todos los sumandos son positivos, por consiguiente, también el polinomio será mayor que cero;

3) $x \geqslant 1$; escribamos el polinomio en la forma

$$x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1$$

Los dos primeros sumandos no son negativos; por consiguiente, también en este caso

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$$

116. Tenemos:

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n = 2\left(1 + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{4}x^4 + \ldots\right), \qquad (1)$$

y el último sumando de la suma entre paréntesis es igual a x^n si n es par y a nx^{n-1} si n es impar. Según la condición, $-1 < x < 1$, de donde se desprende que $\binom{n}{2k}x^{2k} < \binom{n}{2k}$ para todos los valores enteros de k. Por eso,

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n < A_n,$$

donde A_n es el valor del polinomio (1) para $x = \pm 1$, es decir, $A_n = 2^n$.

117. La desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad

$$\varepsilon^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \pm$$
$$\pm 4\varepsilon(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n) \geqslant 0,$$

que es justa, puesto que la parte izquierda es igual a

$$(\varepsilon a_1 \pm 2x_1)^2 + (\varepsilon a_2 \pm 2x_2)^2 + \ldots + (\varepsilon a_n \pm 2x_n)^2$$

118. La expresión bajo la raíz cuadrada deberá ser $\geqslant 0$, por eso,

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Para los valores de x que satisfacen la condición (1) y no son iguales a cero, $\sqrt{1 - 4x^2} < 1$. Por esta razón, si $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$, entonces, la desigualdad indicada en el problema se cumple, puesto que su parte izquierda es negativa.

Si $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, entonces, liberando el numerador de la parte izquierda de la irracionalidad, obtendremos

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} = \frac{4x^2}{(1 + \sqrt{1 - 4x^2})x} = \frac{4x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}$$

Es fácil ver, que el numerador del quebrado derecho, para $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ no supera a 2 y el denominador es $\geqslant 1$. Por eso,

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} \leqslant 2 < 3$$

Así pues, la desigualdad propuesta es justa para los valores de $x \neq 0$ y que satisfacen la condición (1). Siendo $x = 0$ y $|x| > \frac{1}{2}$ la parte izquierda de la desigualdad pierde el sentido.

119. Sea, para mayor certeza, $x \geqslant y$. Entonces, haciendo $\frac{y}{x} = \alpha \leqslant 1$, obtendremos la siguiente igualdad equivalente:

$$\sqrt[m]{1+\alpha^m} \geqslant \sqrt[n]{1+\alpha^n}.$$

Elevando ambas partes de (1) a la potencia mn, obtenemos la desigualdad

$$(1+\alpha^m)^n \geqslant (1+\alpha^n)^m.$$

Es fácil ver que esta desigualdad es justa, puesto que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y $n \geqslant m$.

120. Hagamos

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ radicales}}. \qquad (1)$$

Es fácil ver que $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$, y por consiguiente, $x_n^2 = a + x_{n-1}$. Notemos a continuación que $x_n > x_{n-1}$, puesto que al pasar de $n-1$ a n el último radical interior $\sqrt{a}$ se sustituye por un número mayor $\sqrt{a+\sqrt{a}}$. En vista de esto, $x_n^2 < a + x_n$ y, por consiguiente, las magnitudes que nos interesan satisfacen la desigualdad

$$x^2 - x - a < 0. \qquad (2)$$

Las raíces del trinomio a la izquierda, son iguales a

$$x^{(1)} = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \qquad x^{(2)} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ya que los números x_n satisfacen la desigualdad (2), entonces, todos ellos entran en las raíces $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ (véase la pág. 23). Por consiguiente,

$$x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots), \qquad (3)$$

lo que se exigía demostrar. Para $n=1$ tenemos que $x_1 = \sqrt{a}$ y la desigualdad (3) es evidente.

121. Designemos la expresión con k signos radicales por x_k:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = x_k.$$

Observemos que $x_k < 2$. En efecto, sustituyamos bajo el último signo radical interior 2 por 4. Como resultado, todas las raíces se extraerán sucesivamente y la parte izquierda resultará igual a 2. Por lo tanto, $x_k < 2$. De aquí, en particular, se desprende que el numerador y denominador de la parte izquierda de la desigualdad inicial son diferentes de cero.

Aprovechando a continuación que

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}},$$

transformemos la parte izquierda de la desigualdad inicial de la manera siguiente:

$$\frac{2-\sqrt{x_{n-1}+2}}{2-x_{n-1}} = \frac{\sqrt{x_{n-1}+2}-2}{(x_{n-1}+2)-4} = \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+2}+2} = \frac{1}{x_n+2}.$$

Puesto que $x_n < 2$, entonces, $\frac{1}{x_n+2} > \frac{1}{4}$, lo que se exigía demostrar.

122. Como es conocido, para cualesquiera números reales a y b tiene lugar la desigualdad

$$|a\cdot b|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\text{ (véase la fórmula (1) en la pág. 22)}$$

Aprovechando a continuación que el valor absoluto de la suma no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos correspondientes, obtenemos:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{2}\leqslant\frac{1+1}{2}=1,$$

lo que se exigía demostrar.

123. Si $n=1$, entonces, $x_1=1$ y, por consiguiente, $x_1\geqslant1$, así que la confirmación es justa. Supongamos que es justa para todos los valores de m, donde $1\leqslant m\leqslant n-1$; demostremos su validez para $m=n$. Si todos los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son iguales a la unidad, entonces la confirmación es justa. Pero si aunque sea uno de estos números supera a la unidad, entonces, en virtud de la igualdad $x_1x_2\ldots x_n=1$ existirá otro menor que la unidad. Supongamos que la numeración sea tal, que $x_n>1$, $x_{n-1}<1$. De la suposición de la inducción y la condición

$$x_1x_2\ldots x_{n-2}(x_{n-1}x_n)=1$$

se desprende que

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n\geqslant n-1,$$

es decir,

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n+1\geqslant n.$$

Puesto que $(x_n-1)(1-x_{n-1})>0$, entonces,

$$x_n+x_{n-1}-x_nx_{n-1}-1>0$$

y por consiguiente,

$$x_{n-1}+x_n>x_{n-1}x_n+1.$$

Así pues,

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n>x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n+1\geqslant n,$$

y la confirmación queda demostrada.

4. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales, identidades y desigualdades

124. Como se ve de la ecuación, ésta tiene sentido solamente para $a>0$, $a\neq1$ y $b>0$, $b\neq1$. Para la resolución de la ecuación empleamos la fórmula de paso a logaritmos con otra base:

$$^b\log a=\frac{^c\log a}{^c\log b}$$

(véase la fórmula (2) en la pág. 27). Aquí c es una base arbitraria ($c>0$, $c\neq1$). La elección de la base c en este problema es indiferente, sólo hace falta reducir todos los logaritmos a una misma base. Se puede, por ejemplo, tomar como base común a a, por cuanto $a>0$ y $a\neq1$. Entonces la ecuación se transforma a la forma

$$\frac{{}^a\log x}{{}^a\log 2}\,{}^a\log^2 2 - 2\,{}^a\log x\,{}^a\log\frac{1}{b} = \frac{{}^a\log x}{{}^a\log\sqrt[3]{a}}\,{}^a\log x,$$

o después de la simplificación

$$({}^a\log 2 + 2\,{}^a\log b)\,{}^a\log x = 3\,{}^a\log^2 x.$$

De aquí, la primera solución es:

$${}^a\log x = 0, \quad \text{es decir} \quad x = 1$$

La segunda solución es:

$${}^a\log x = \frac{1}{3}({}^a\log 2 + 2\,{}^a\log b) = \frac{1}{3}\,{}^a\log 2b^2 = {}^a\log\sqrt[3]{2b^2},$$

es decir

$$x = \sqrt[3]{2b^2}$$

125 Pasemos a los logaritmos de base 2, haciendo uso de la fórmula (2), pág 27, obtenemos:

$$\frac{1}{{}^2\log x} + \frac{1}{{}^2\log x - 4} = \frac{1}{{}^2\log x - 6}$$

Esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$${}^2\log^2 x - 5\,{}^2\log x + 6 = 0.$$

De aquí

$$({}^2\log x)_1 = 2, \qquad x_1 = 4,$$
$$({}^2\log x)_2 = 3, \qquad x_2 = 8.$$

126. Potenciando con relación a la base 2, obtenemos

$$9^{x-1} + 7 = 4\,(3^{x-1} + 1)$$

De aquí

$$(3^{x-1})^2 - 4\,(3^{x-1}) + 3 = 0$$

Por consiguiente,

$$(3^{x-1})_1 = 3, \quad x_1 = 2; \qquad (3^{x-1})_2 = 1, \quad x_2 = 1.$$

127 Pasemos en la ecuación a los logaritmos de base 3. Sobre la base de la fórmula (2), pág 27, tendremos:

$$\frac{1 - {}^3\log x}{1 + {}^3\log x} + {}^3\log^2 x = 1.$$

De aquí

$$(1 - {}^3\log x)\,[1 - (1 + {}^3\log x)^2] = 0$$

y, por consiguiente,

$$({}^3\log x)_1 = 1, \qquad x_1 = 3,$$
$$({}^3\log x)_2 = 0, \qquad x_2 = 1;$$
$$({}^3\log x)_3 = -2 \qquad x_3 = \frac{1}{9}.$$

128. Pasemos en la ecuación a los logaritmos de base 2. Sobre la base de la fórmula (2), pág 27, tendremos

$$\frac{1 - {}^2\log x}{1 + {}^2\log x}\,{}^2\log^2 x + {}^2\log^4 x = 1.$$

Multiplicando ambas partes de la ecuación por el denominador, pasamos todos los términos a la parte izquierda y la descomponemos en factores.
Como resultado obtenemos

$$({}^2\log x-1)({}^2\log^4 x+2\,{}^2\log^3 x+{}^2\log^2 x+2\,{}^2\log x+1)=0$$

Para $x>1$, el segundo factor, por lo visto, es positivo y no se reduce a cero. Igualando el primer factor a cero, establecemos que para $x>1$, la ecuación inicial tiene la única raíz $x=2$.

129. Pasemos en la ecuación a los logaritmos de base a $\left(a>0 \text{ y } a\neq 1,\right.$ en el caso contrario, la expresión $\left.{}^{\frac{1}{a}}\log 2x \text{ no tendría sentido}\right)$. En virtud de la fórmula (2), pág. 27, obtenemos

$$\frac{{}^a\log 2x}{{}^a\log a^2\sqrt{x}}+\frac{{}^a\log 2x}{{}^a\log\frac{1}{a}\cdot{}^a\log ax}=0.$$

De aquí hallamos:

1) ${}^a\log 2x=0$, $x=\frac{1}{2}$ no satisface a la ecuación inicial (el logaritmo de base 1 del número a no existe);

2) ${}^a\log ax={}^a\log(a^2\sqrt{x})$, $x=a^2$

Respuesta: $x=a^2$.

130. Empleando la igualdad ${}^x\log b=\frac{1}{{}^b\log x}$, transformemos la ecuación inicial en la ecuación equivalente:

$${}^b\log[x(2\log a-x)]=2$$

De aquí, después de la potenciación, obtenemos:

$$x^2-2\log a\cdot x+b^2=0$$

Una vez resuelta esta ecuación hallaremos

$$x_{1,2}=\log a\pm\sqrt{\log^2 a-b^2}.$$

Para $a\geqslant 10^b$ y $\log a\neq\frac{1}{2}(b^2+1)$ ambas raíces son positivas, es decir, diferentes de la unidad y, como es fácil comprobar, satisfacen a la ecuación inicial. Siendo $\log a=\frac{1}{2}(b^2+1)$ se debe tomar solamente la raíz $x_1=b^2$. Para $a<10^b$ la ecuación no tiene raíces.

131. Pasando en la ecuación a los logaritmos de base a, la reducimos a la forma

$$\sqrt{{}^a\log\sqrt[4]{ax}\left(1+\frac{1}{{}^a\log x}\right)}+\sqrt{{}^a\log\sqrt[4]{\frac{x}{a}}\left(1-\frac{1}{{}^a\log x}\right)}=a.$$

Después de las ulteriores transformaciones obtenemos.

$$\sqrt{\frac{({}^a\log x+1)^2}{4\,{}^a\log x}}+\sqrt{\frac{({}^a\log x-1)^2}{4\,{}^a\log x}}=a$$

Teniendo en cuenta que las raíces cuadradas aquí tienen sentido aritmético, esta ecuación se puede escribir así:

$$|{}^a\log x+1|+|{}^a\log x-1|=2a\sqrt{{}^a\log x}. \qquad (1)$$

Examinemos ahora dos casos:

1) Supongamos que

$$^{a}\log x > 1. \qquad (2)$$

Entonces, la igualdad (1) adquiere la forma

$$^{a}\log x = a\sqrt{^{a}\log x},$$

de donde

$$x_1 = a^{a^2}.$$

Es fácil de ver que la condición (2), en este caso, se satisface solamente cuando $a > 1$.

2) Supongamos que

$$0 < {^{a}\log x} \leqslant 1. \qquad (3)$$

Entonces, la igualdad (1) toma la forma

$$2 = 2a\sqrt{^{a}\log x}.$$

De aquí

$$x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

Señalemos que la condición (3) se cumple solamente en el caso en que $a \geqslant 1$. Puesto que, de antemano, $a \neq 1$ (de lo contrario la ecuación inicial perdería el sentido), entonces, también la segunda raíz existe solamente con la condición de que $a > 1$

Hemos agotado todas las posibilidades, puesto que los valores de x para los cuales $^{a}\log x \leqslant 0$, por lo visto, no pueden satisfacer la ecuación (1). Así pues, para $a > 1$ la ecuación examinada tiene dos raíces:

$$x_1 = a^{a^2} \quad \text{y} \quad x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

Para $0 < a < 1$, la ecuación no tiene raíces.

132. Tenemos

$$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right) = \log(x-40).$$

Suponiendo que sea $\sqrt{x+1} = t$, después de la potenciación obtenemos la ecuación

$$t^2 - t - 42 = 0.$$

Sus raíces son: $t_1 = 7$ y $t_2 = -6$. Puesto que $t = \sqrt{x+1} \geqslant 0$, omitimos t_2. A la raíz t_1 le corresponde el valor $x = 48$. Por comprobación nos convencemos de que este valor satisface a la ecuación inicial. Así pues, la ecuación tiene la única raíz $x = 48$

133. Pasando en la ecuación a los logaritmos de base a, obtenemos:

$$1 + \frac{^{a}\log(p-x)}{^{a}\log(x+q)} = \frac{2\,{^{a}\log(p-q)} - {^{a}\log 4}}{^{a}\log(x+q)}.$$

De aquí, después de la simplificación y potenciación, obtenemos la ecuación cuadrada

$$(x+q)(p-x) = \frac{1}{4}(p-q)^2.$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$x_1 = \frac{1}{2}(p-q) + \sqrt{pq}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}(p-q) - \sqrt{pq}.$$

Es fácil de comprobar que ambas raíces satisfacen a la desigualdad

$$p > x_{1,2} > -q,$$

y, por consiguiente, también a la ecuación inicial.

134. Después de simples transformaciones que emplean la fórmula de paso de un sistema de logaritmos a otro, reducimos la ecuación dada a la forma

$$^{\sqrt{5}}\log x\sqrt{\frac{3}{^{\sqrt{5}}\log x}+3}=-\sqrt{6}.$$

Haciendo $^{\sqrt{5}}\log x=t$, después de la simplificación y elevación al cuadrado, obtenemos la ecuación

$$t^3+t-2=0.$$

Sus raíces son: $t_1=-2$, $t_2=1$. A la primera raíz le corresponde el valor $x=\frac{1}{5}$ que, como es fácil comprobar, satisface también a la ecuación inicial. A la segunda raíz le corresponde el valor $x=\sqrt{5}$, que no satisface a la ecuación inicial.

135. Aprovechando que $0{,}4=\frac{2}{5}$ y $6{,}25=\left(\frac{5}{2}\right)^2$, reducimos la ecuación inicial a la forma

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2(\log x^3-2)}.$$

Igualando los exponentes, obtenemos la ecuación

$$\log^2 x-6\log x+5=0,$$

una vez resuelta la cual hallaremos.

$$(\log x)_1=1,\quad x_1=10;\qquad (\log x)_2=5,\quad x_2=10^5$$

136. Pasando en la ecuación a los logaritmos de base 10, obtenemos

$$1+\frac{\log\left(\frac{4-x}{10}\right)}{\log x}=(\log\log n-1)\frac{1}{\log x}$$

De aquí, después de simples transformaciones, obtenemos la ecuación

$$\log\left(x\frac{4-x}{10}\right)=\log\frac{\log n}{10}.$$

Después de la potenciación tendremos:

$$x^2-4x+\log n=0,$$

de donde,

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-\log n}.$$

Ahora, un examen no camplicado conduce a los siguientes resultados

a) Si $0<n<10^4$ y $n\neq 10^3$, entonces la ecuación tiene dos raíces diferentes

$$x_1=2+\sqrt{4-\log n}\quad \text{y}\quad x_2=2-\sqrt{4-\log n}$$

b) Si $n=10^3$, entonces, se tiene una sola raíz $x=3$ (prescindimos de $x=1$), para $n=10^4$, obtenemos también una sola raíz $x=2$

c) Si por fin $n>10^4$, la ecuación no tiene raíces

137. Pasemos en la ecuación a los logaritmos de base 2. Como resultado obtendremos la ecuación

$$\frac{1}{^2\log \operatorname{sen} x}\cdot\frac{^2\log a}{2\,^2\log \operatorname{sen} x}+1=0.$$

De aquí

$$^{2}\log^2 \operatorname{sen} x = -\frac{^{2}\log a}{2}$$

Puesto que la magnitud a la izquierda es estrictamente positiva (sen $x \neq 1$, de lo contrario el símbolo $^{\operatorname{sen} x}\log 2$ perdería el sentido), entonces, $^{2}\log a < 0$ y, por consiguiente, para $a > 1$, la ecuación no tiene raíces. Admitiendo que sea $0 < a < 1$, obtenemos:

$$^{2}\log \operatorname{sen} x = \pm \sqrt{-\frac{^{2}\log a}{2}}$$

Puesto que $^{2}\log \operatorname{sen} x < 0$, prescindimos del signo más delante del radical. Entonces

$$\operatorname{sen} x = 2^{-\sqrt{-\frac{^{2}\log a}{2}}}$$

y

$$x = (-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{-\frac{^{2}\log a}{2}}} + \pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

Es fácil de ver que toda esta infinita serie de valores de x satisface a la ecuación inicial

138. De la segunda ecuación hallamos:

$$x + y = \frac{2}{x-y}. \tag{1}$$

Colocando esta expresión de $x+y$ en la primera ecuación obtendremos

$$1 - {}^{2}\log(x-y) - {}^{3}\log(x-y) = 1$$

o bien

$$^{2}\log(x-y) + {}^{3}\log(x-y) = 0.$$

Pasando a los logaritmos de base 3, transformemos la última ecuación a la forma

$$(^{2}\log 3 + 1)\, {}^{3}\log(x-y) = 0$$

Puesto que $^{2}\log 3 + 1 \neq 0$, de aquí $^{3}\log(x-y) = 0$ y $x - y = 1$. Junto con la ecuación (1) esto da el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2, \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$x = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{1}{2}$$

Por comprobación nos convencemos de que el par de números hallado es la solución del sistema inicial

139 Mediante la logaritmación de la primera ecuación respecto a la base c, tendremos

$$a\, {}^{c}\log x = b\, {}^{c}\log y. \tag{1}$$

De la segunda ecuación hallamos.

$$^{c}\log x - {}^{c}\log y = \frac{^{c}\log x}{^{c}\log y}.$$

Colocando aquí ${}^{c}\log y$ de la ecuación (1), obtendremos:

$$^{c}\log x - \frac{a}{b}\,{}^{c}\log x = \frac{b}{a}, \quad \text{o bien} \quad {}^{c}\log x^{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Por potenciación obtenemos

$$x^{\frac{b-a}{b}} = c^{\frac{b}{a}}, \quad \text{o bien} \quad x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}.$$

Ahora, de la primera ecuación del sistema hallamos

$$y = x^{\frac{a}{b}} = c^{\frac{b}{b-a}}.$$

140. Haciendo uso de la identidad logarítmica $a^{a\log b} = b$, escribamos el sistema en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} {}^{5}\log x + y &= 7, \\ x^{y} &= 5^{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Realizando la potenciación de la primera ecuación, obtenemos $x \cdot 5^{y} = 5^{7}$, de donde

$$x = 5^{7-y}. \qquad (2)$$

Colocando el valor de x de la ecuación (2) en la segunda ecuación del sistema (1), obtenemos la ecuación $5^{12+y^2-7y} = 1$, que tiene las raíces

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 3.$$

Como resultado obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = 125, \quad y_1 = 4, \qquad x_2 = 625, \quad y_2 = 3$$

141. Efectuando la logaritmación de la primera ecuación con relación a la base y, obtenemos la siguiente ecuación cuadrada respecto a ${}^{y}\log x$:

$$2\,{}^{y}\log^2 x - 5\,{}^{y}\log x + 2 = 0,$$

que tiene las raíces

$${}^{y}\log x = 2, \quad {}^{y}\log x = \frac{1}{2}.$$

Si ${}^{y}\log x = 2$, entonces

$$x = y^2 \qquad (1)$$

En virtud de la identidad ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$, de la segunda ecuación obtendremos:

$${}^{y}\log (y - 3x) = {}^{y}\log 4,$$

de donde

$$y - 3x = 4 \qquad (2)$$

Junto con (1), la ecuación obtenida nos da la siguiente ecuación cuadrada para la determinación de y:

$$3y^2 - y + 4 = 0.$$

Esta ecuación no tiene raíces reales. Si ${}^{y}\log x = \frac{1}{2}$, entonces $x = \sqrt{y}$ e $y = x^2$. En este caso, en virtud de (2), obtenemos la ecuación

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Respuesta: $x = 4$, $y = 16$.

142. Realizando la logaritmación de la primera ecuación respecto a la base a, hallaremos:

$$x + y\,{}^{a}\log b = 1 + {}^{a}\log b. \tag{1}$$

Pasemos en la segunda ecuación a los logaritmos de base a. Entonces

$$2\,{}^{a}\log x = -\frac{{}^{a}\log y}{{}^{a}\log b}\,\frac{{}^{a}\log b}{{}^{a}\log \sqrt{a}} = -2\,{}^{a}\log y.$$

De aquí $x = \frac{1}{y}$. Colocando $y = \frac{1}{x}$ en (1), obtenemos la ecuación

$$x^2 - x\,(1 + {}^{a}\log b) + {}^{a}\log b = 0,$$

cuyas raíces son:

$$x_1 = {}^{a}\log b \quad \text{y} \quad x_2 = 1$$

La respuesta definitiva es:

$$x_1 = {}^{a}\log b, \quad y_1 = {}^{b}\log a; \qquad x_2 = 1, \quad y_2 = 1.$$

143. Pasemos en la primera ecuación a los logaritmos de base x; entonces la ecuación toma la forma

$$3\left({}^{x}\log y + \frac{1}{{}^{x}\log y}\right) = 10.$$

Haciendo aquí ${}^{x}\log y = t$, obtenemos la ecuación

$$3t^2 - 10t + 3 = 0,$$

cuyas raíces son $t_1 = 3$ y $t_2 = \frac{1}{3}$. En el primer caso ${}^{x}\log y = 3$, $y = x^3$ y, en virtud de la segunda ecuación del sistema inicial, $x^4 = 81$. Puesto que $x > 0$ e $y > 0$, en este caso obtenemos una sola solución:

$$x_1 = 3, \qquad y_1 = 27.$$

Suponiendo a continuación ${}^{x}\log y = \frac{1}{3}$, hallamos una solución más:

$$x_2 = 27, \qquad y_2 = 3.$$

144. Pasemos en cada una de las ecuaciones del sistema a los logaritmos de base 2. Como resultado obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 12}\,({}^{2}\log x + {}^{2}\log y) &= {}^{2}\log x, \\ {}^{2}\log x \cdot \frac{{}^{2}\log (x+y)}{{}^{2}\log 3} &= 3\,\frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 3}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Puesto que $x \neq 1$ (de lo contrario el primer miembro de la primera ecuación del sistema inicial no tendría sentido), ${}^{2}\log x \neq 0$ y el sistema (1) se puede escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} {}^{2}\log x + {}^{2}\log y &= {}^{2}\log 12, \\ {}^{2}\log (x+y) &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Después de la potenciación, obtenemos:

$$xy = 12, \qquad x + y = 8,$$

de donde

$$x_1 = 6, \quad y_1 = 2; \qquad x_2 = 2, \quad y_2 = 6.$$

145. Pasando en cada una de las ecuaciones del sistema a los logaritmos de base 2, obtendremos:

$$\left.\begin{array}{l} x\,{}^{2}\log y = y\sqrt{y}\,(1-{}^{2}\log x), \\ 2\,{}^{2}\log x = 3\,{}^{2}\log y \end{array}\right\} \qquad (1)$$

De la segunda ecuación del sistema (1) hallamos $x^2=y^3$, de donde

$$x = y^{\frac{3}{2}}. \qquad (2)$$

Empleando (2), de la primera ecuación hallaremos que $y=\sqrt[5]{4}$. Por consiguiente,

$$x=2^{\frac{3}{5}}, \quad y=2^{\frac{2}{5}}.$$

146. Transformemos el sistema, pasando en la primera ecuación a los logaritmos de base 2, en la segunda, a los de base 3 y en la tercera, a los de base 4. Como resultado obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} {}^{2}\log x+\frac{1}{2}\,{}^{2}\log y+\frac{1}{2}\,{}^{2}\log z={}^{2}\log 4, \\ {}^{3}\log y+\frac{1}{2}\,{}^{3}\log z+\frac{1}{2}\,{}^{3}\log x={}^{3}\log 9, \\ {}^{4}\log z+\frac{1}{2}\,{}^{4}\log x+\frac{1}{2}\,{}^{4}\log y={}^{4}\log 16. \end{array}\right\}$$

Despues de la potenciación, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x\sqrt{yz}=4, \\ y\sqrt{xz}=9, \\ z\sqrt{xy}=16 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Multiplicando las ecuaciones del sistema (1) miembro a miembro, hallaremos:

$$(xyz)^2=24^2.$$

Puesto que $x>0$, $y>0$, $z>0$, entonces,

$$xyz=24. \qquad (2)$$

Elevando la primera ecuación del sistema (1) al cuadrado y empleando (2), obtendremos:

$$x=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

Análogamente hallamos que $y=\frac{27}{8}$ y $z=\frac{32}{3}$. Por comprobación nos convencemos de que los tres números hallados son la solución del sistema

147. Pasando en la primera ecuación a los logaritmos de base 2 y realizando a continuación la potenciación, obtendremos:

$$y^2-xy=4. \qquad (1)$$

La ecuación (1), junto con la segunda ecuación del sistema inicial, da el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ y^2-xy=4. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Este sistema tiene dos soluciones que satisfacen a las condiciones $y > x$, $y > 0$, a saber

$$x_1 = -\frac{7}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 4.$$

148. Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 4^x, hallaremos

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

De aquí

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{3}{2}$$

149. Colocando el valor de y de la segunda ecuación en la primera, obtendremos:

$$x^{x + \frac{1}{x^2}} = x^{-2x + \frac{2}{x^2}},$$

De aquí, o $x = 1$, o bien

$$x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2}$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Respuesta

$$x_1 = y_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad y_2 = \sqrt[3]{9}.$$

150. Haciendo $a^x = u$ y $a^y = v$, escribimos el sistema en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 &= 2b, \\ uv &= c \end{aligned}\right\}$$

De estas dos ecuaciones se desprende:

$$(u+v)^2 = 2(b+c), \quad (u-v)^2 = 2(b-c).$$

Puesto que los valores buscados de u y v deben ser positivos, la primera ecuación se reduce a la ecuación

$$u + v = \sqrt{2(b+c)} \tag{1}$$

La segunda ecuación demuestra que la solubilidad del sistema requiere, además de que sean positivos los números b y c, el cumplimiento de la desigualdad

$$b \geqslant c \tag{2}$$

Al mismo tiempo,

$$u - v = \pm \sqrt{2(b-c)}. \tag{3}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (1) y (2), en el caso del signo más obtendremos.

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c} + \sqrt{b-c}),$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c} - \sqrt{b-c}).$$

En el caso del signo menos obtenemos

$$u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}\right),$$

$$v_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}\right).$$

Hemos hallado dos soluciones del sistema (1), además, al cumplir la condición (2) todos los valores de las incógnitas, por lo visto, son positivos. Las dos soluciones correspondientes al sistema inicial son:

$$x_1={}^a\log u_1,\quad y_1={}^a\log v_1;\qquad x_2={}^a\log u_2,\quad y_2={}^a\log v_2.$$

Ahora, podemos confirmar que para que el sistema sea soluble es necesario y suficiente que $b>0$, $c>0$ y $b\geqslant c$. Al cumplir estas condiciones el sistema tiene dos soluciones.

151. Multiplicando ambas ecuaciones entre sí, obtendremos:

$$(xy)^{x+y}=(xy)^{2n}$$

De aquí, en virtud de que x e y son positivos, se desprende que o bien $xy=1$, ó $xy\neq 1$, y entonces

$$x+y=2n. \tag{1}$$

Examinemos al principio el segundo caso. La primera ecuación del sistema inicial toma la forma $x^{2n}=y^n$, de donde

$$y=x^2. \tag{2}$$

Colocando este valor de y en la ecuación (1), obtenemos que

$$x^2+x-2n=0.$$

Esta ecuación tiene la única raiz positiva

$$x_1=\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \tag{3}$$

El valor correspondiente de y lo hallamos haciendo uso de (2).

$$y_1=\frac{1}{4}\left(\sqrt{8n+1}-1\right)^2 \tag{4}$$

En el segundo caso, cuando $xy=1$, $y=\dfrac{1}{x}$, y la primera ecuación del sistema inicial adquiere la forma

$$x^{\frac{1}{x}+x}=x^{-n}$$

En virtud de que x y n son positivos, esta igualdad puede ser válida solamente en el caso en que $x=1$. De este modo hallamos una solución más $x_2=1$, $y_2=1$.

152. Transformamos el sistema a la forma

$$\left.\begin{aligned}&(3x+y)^{x-y}=9,\\ &\sqrt[x-y]{324}=2\,(3x+y)^2.\end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación hallamos:

$$324=2^{x-y}\,(3x+y)^{2\,(x-y)},$$

y por consiguiente, en virtud de la primera ecuación

$$324=2^{x-y}\cdot 81.$$

De aquí $2^2=2^{x-y}$, es decir,

$$x-y=2. \tag{1}$$

Resolviendo la ecuación (1) junto con la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos dos sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2, \\ 3x+y=3. \end{array}\right\} \quad (2) \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} x-y=2, \\ 3x+y=-3. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Solución del sistema (2):

$$x_1=\frac{5}{4}, \qquad y_1=-\frac{3}{4}.$$

Solución del sistema (3)

$$x_2=-\frac{1}{4}, \qquad y_2=-\frac{9}{4}.$$

Por comprobación nos convencemos de que los dos pares de números satisfacen al sistema inicial

153. Hagamos $\frac{q}{p}=\alpha$. Si $\alpha=1$, es decir, $p=q$, entonces, cualquier par de números iguales y positivos satisfacen al sistema. Por esta razón, consideraremos que $\alpha\neq 1$. De la segunda ecuación obtenemos que $x=y^{\alpha}$. Realizando la logaritmación de la primera ecuación y empleando esta igualdad, tendremos:

$$y \log y\,(\alpha-y^{\alpha-1})=0.$$

Puesto que $y>0$, entonces, o bien $\log y=0$, o bien $\alpha=y^{\alpha-1}$. En el primer caso obtenemos que $x_1=1$, $y_1=1$. En el segundo caso, obtendremos:

$$x_2=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \qquad y_2=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Ambos pares de números satisfacen también al sistema inicial.

154. Efectuando la logaritmación de ambas ecuaciones, obtendremos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y\log x=x\log y, \\ x\log p=y\log q, \end{array}\right\} \tag{1}$$

del que determinamos la relación $\frac{x}{y}=\frac{\log q}{\log p}=\alpha$; por consiguiente,

$$x=\alpha y \tag{2}$$

Si $p=q$, el sistema tiene un número infinito de soluciones del tipo $x=y=a$, donde a es cualquier valor mayor que cero. Si $p\neq q$, entonces, colocando el valor de x de la fórmula (2) en la primera ecuación del sistema (1), hallaremos:

$$x=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \qquad y=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Por consiguiente, para la condición $p\neq q$ el sistema tiene una sola solución.

155 Realizando la logaritmación de las dos partes de la igualdad $a^2=c^2-b^2$, obtenemos

$$2={}^{a}\log(c-b)+{}^{a}\log(c+b).$$

De aquí,

$$2=\frac{1}{{}^{c-b}\log a}+\frac{1}{{}^{c+b}\log a}$$

y, por consiguiente,

$${}^{c+b}\log a+{}^{c-b}\log a=2\,{}^{c+b}\log a\cdot{}^{c-b}\log a.$$

156. Utilizando la fórmula ${}^{n}\log m=\frac{1}{{}^{m}\log n}$, obtendremos fácilmente que

$$ {}^{b^{2-k}}\log a=2^{k\,b}\log a \quad \text{y} \quad {}^{a^{2^k}}\log b=\frac{1}{2^k}\,{}^{a}\log b, $$

$$ \sum_{k=0}^{n}\left({}^{b^{2-k}}\log a-{}^{a^{2^k}}\log b\right)^{2\,*)}=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{k\,b}\log a-\frac{1}{2^k}\,{}^{a}\log b\right)^{2}= $$

$$ ={}^{b}\log^2 a\sum_{k=0}^{n}4^k+{}^{a}\log^2 b\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}-\sum_{k=0}^{n}2= $$

$$ =\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\,{}^{b}\log^2 a+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}\,{}^{a}\log^2 b-2(n+1)= $$

$$ =\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)\,{}^{b}\log^2 a+\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)\frac{1}{4^n}\,{}^{a}\log^2 b-2(n+1)= $$

$$ =\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)\left({}^{b}\log^2 a+\frac{1}{4^{n}\,{}^{b}\log^2 a}\right)-2(n+1). $$

157.

$$ a^{\frac{{}^{b}\log\,{}^{b}\log a}{{}^{b}\log a}}=\left(a^{{}^{a}\log b}\right)^{{}^{b}\log\,{}^{b}\log a}=b^{{}^{b}\log\,{}^{b}\log a}={}^{b}\log a. $$

158. Tenemos que

$$ c=a_1a_2\ldots a_n=a\cdot aq\ \ldots\ (aq^{n-1})=a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}. $$

Empleando la fórmula de paso de un sistema de logaritmos a otro, obtenemos:

$$ {}^{c}\log b=\frac{{}^{a}\log b}{{}^{a}\log c}=\frac{A}{n+\frac{n(n-1)}{2}\,{}^{a}\log q}. $$

Pero

$$ {}^{a}\log q=\frac{{}^{b}\log q}{{}^{b}\log a}=\frac{{}^{a}\log b}{{}^{q}\log b}=\frac{A}{B} $$

Por eso

$$ {}^{c}\log b=\frac{2AB}{2nB+n(n-1)A}. $$

159. Utilizando la igualdad ${}^{a}\log b=\frac{1}{{}^{b}\log a}$, transformemos la fórmula dada de la manera siguiente:

$$ \frac{{}^{N}\log c}{{}^{N}\log a}=\frac{\frac{1}{{}^{N}\log a}-\frac{1}{{}^{N}\log b}}{\frac{1}{{}^{N}\log b}-\frac{1}{{}^{N}\log c}}=\frac{{}^{N}\log\frac{b}{a}}{{}^{N}\log\frac{c}{b}}\cdot\frac{{}^{N}\log c}{{}^{N}\log a}. $$

---

*) El símbolo $\sum_{k=0}^{n}a_k$ significa la suma $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$.

De aquí se desprende que

$$^{N}\log \frac{b}{a} = {}^{N}\log \frac{c}{b}, \qquad (1)$$

puesto que el factor $\frac{^{N}\log c}{^{N}\log a} \neq 0$. Realizando la potenciación de la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

Así pues b es el valor medio proporcional entre a y c. Realizando a continuación la logaritmación de la igualdad (2) respecto a cualquier base N y efectuando los cómputos en orden inverso, concluiremos la demostración de la afirmación propuesta.

160. Se debe considerar que $N \neq 1$, de lo contrario, el quebrado en la parte derecha de la identidad se hace indeterminado. Dividiendo la identidad a demostrar por $^{a}\log N\, ^{b}\log N\, ^{c}\log N$ la sustituimos por la siguiente identidad equivalente:

$$\frac{1}{^{a}\log N} + \frac{1}{^{b}\log N} + \frac{1}{^{c}\log N} = \frac{1}{^{abc}\log N}.$$

Pasando aquí a los logaritmos de base N, obtendremos:

$$^{N}\log a + {}^{N}\log b + {}^{N}\log c = {}^{N}\log abc.$$

Puesto que es evidente que la última identidad tiene lugar, el problema queda resuelto.

161. Tenemos:

$$\frac{^{a}\log x}{^{ab}\log x} = \frac{^{x}\log ab}{^{x}\log a} = 1 + \frac{^{x}\log b}{^{x}\log a} = 1 + {}^{a}\log b,$$

lo que se exigía demostrar.

162. Empleando la identidad logarítmica $^{b}\log a = \frac{^{c}\log a}{^{c}\log b}$, transformemos la parte izquierda de la desigualdad dada de la manera siguiente:

$$^{\frac{1}{2}}\log x + {}^{3}\log x = \frac{^{3}\log x}{^{3}\log \frac{1}{2}} + {}^{3}\log x = {}^{3}\log x \left(^{\frac{1}{2}}\log 3 + 1 \right) =$$

$$= {}^{3}\log x \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{3}{2} = \frac{^{3}\log x}{^{\frac{3}{2}}\log \frac{1}{2}} = -\frac{^{3}\log x}{^{\frac{3}{2}}\log 2}.$$

Entonces, la desigualdad dada adquiere la forma:

$$-\frac{^{3}\log x}{^{\frac{3}{2}}\log 2} > 1.$$

Puesto que $2 > 1$ y $\frac{3}{2} > 1$ y por la propiedad de los logaritmos $^{\frac{3}{2}}\log 2 > 0$, entonces, la desigualdad anterior es equivalente a la desigualdad

$$^{3}\log x < -{}^{\frac{3}{2}}\log 2.$$

De aquí, observando además que por el sentido del problema $x > 0$, obtendremos definitivamente:

$$0 < x < 3^{-\frac{3}{2} \log 2}.$$

163 Ya que $x > 0$, la desigualdad dada es equivalente a la desigualdad

$$x^{{}^a\log x} > a^2.$$

Pero $a > 1$, por eso, realizando la logaritmación de la última desigualdad respecto a la base a (esta operación conduce también a una desigualdad equivalente), obtendremos:

$${}^a\log^2 x > 2.$$

De aquí hallaremos definitivamente:
o bien ${}^a\log x > \sqrt{2}$, y, por consiguiente, $x > a^{\sqrt{2}}$;
o bien ${}^a\log x < -\sqrt{2}$ y entonces $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$.

164 Por el sentido del problema $x > 0$, por eso, la desigualdad dada es equivalente a la desigualdad

$${}^a\log x(x+1) < {}^a\log(2x+6).$$

Puesto que $a > 1$, entonces $x(x+1) < 2x+6$, o bien

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrada con la condición de que $x > 0$, obtenemos que

$$0 < x < 3.$$

165. La desigualdad dada es equivalente a la siguiente:

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 1.$$

Puesto que $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, la desigualdad $0 < x^2 - 5x + 6$ es justa para

$$x < 2$$

y

$$x > 3.$$

Resolviendo a continuación la desigualdad $x^2 - 5x + 6 < 1$, hallamos que se cumple cuando

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Puesto que $\sqrt{5} > 2$, entonces $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$ y $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3$. Por eso, la desigualdad inicial tiene lugar cuando

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2 \quad \text{y} \quad 3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

166. Reduciendo la parte izquierda a un común denominador hallamos que

$$\frac{-1}{{}^2\log x\,({}^2\log x - 1)} < 1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1 + {}^2\log x\,({}^2\log x - 1)}{{}^2\log x\,({}^2\log x - 1)} > 0.$$

Puesto que el numerador de la última expresión es positivo $\left[\text{en efecto, } 1+{}^2\log^2 x-{}^2\log x=\left({}^2\log x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$, la desigualdad se reduce a lo siguiente:

$$^2\log x\,(^2\log x-1)>0.$$

Esta última desigualdad se cumple siendo $x>2$ y siendo $0<x<1$.

167. Por el sentido del problema $x>0$ y, por lo tanto, la desigualdad dada es equivalente a la desigualdad

$$x^{3-{}^2\log^2 x-2\,{}^2\log x}>1.$$

Realicemos la logaritmación de esta desigualdad respecto a la base 2 y hagamos $y={}^2\log x$; obtendremos una desigualdad equivalente

$$y\,(3-y^2-2y)>0,$$

que, después de descomponer el trinomio cuadrado en factores, se puede escribir en la forma

$$y\,(1-y)\,(3+y)>0.$$

Esta desigualdad puede ser cumplida cuando, y sólo cuando, o bien los tres factores son positivos, o bien uno de ellos es positivo y los otros dos son negativos. En el primer caso, es decir, cuando

$$y>0,\quad 1-y>0,\quad 3+y>0,$$

hallamos que $0<y<1$ y, por consiguiente,

$$1<x<2. \tag{1}$$

El segundo caso se divide en tres subcasos, con la particularidad de que se obtiene un sistema de desigualdades no contradictorio solamente en uno de los subcasos, cuando

$$y<0,\quad 1-y>0,\quad 3+y<0.$$

De aquí $y<-3$ y, por lo tanto,

$$0<x<\frac{1}{8}. \tag{2}$$

Así pues, la desigualdad inicial tiene lugar cuando, y sólo cuando, o bien

$$0<x<\frac{1}{8},$$

o bien

$$1<x<2.$$

168. Haciendo $^2\log x=y$ y notando que $^x\log 2=\frac{1}{^2\log x}=\frac{1}{y}$, escribamos la desigualdad dada en la forma

$$y+\frac{1}{y}+2\cos\alpha\leqslant 0. \tag{1}$$

El número $z=y+\frac{1}{y}$ tiene el mismo signo que el número y y $|z|\geqslant 2$ para todos los valores de y (véase (2), pág. 22). Por eso, si $z>0$, entonces, la desigualdad $z\leqslant -2\cos\alpha$ puede ser cumplida solamente en el caso en que $z=2(y=1)$ y $\cos\alpha=-1$, es decir, si en la desigualdad inicial $x=2$ y $\alpha=(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Para estos valores tiene lugar el signo de igualdad.

Pero si $z<0$, es decir, $y<0$, entonces $z\leqslant -2$ y la desigualdad (1) se cumple para todos los valores de α, de donde se desprende que la desigualdad inicial se cumple, además de los casos de los valores hallados, siendo $0 < x < 1$ y para todos los valores reales de α.

169. La desigualdad inicial es equivalente a la siguiente

$$0 < {}^4\log(x^2-5) < 1,$$

De donde $1 < x^2-5 < 4$ ó $6 < x^2 < 9$ ó $\sqrt{6} < |x| < 3$. Respuesta. $\sqrt{6} < x < 3$ y $-3 < x < -\sqrt{6}$.

5. Combinatoria y binomio de Newton

170. Escribiendo por separado las relaciones entre el primer miembro de la proporción y el segundo y entre el segundo y el tercero, después de las simplificaciones correspondientes, obtendremos:

$$\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} : \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} = \frac{n-m+1}{m+1},$$

$$\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} : \frac{(n+1)!}{(m-1)!\,(n-m+2)!} = \frac{n-m+2}{m}.$$

En virtud de la condición del problema obtenemos dos ecuaciones:

$$\frac{n-m+1}{m+1}=1, \qquad \frac{n-m+2}{m}=\frac{5}{3}.$$

Resolviéndolas conjuntamente obtendremos que $m=3$, $n=6$.

171. Tenemos:

$$(1+x^2-x^3)^9 = 1+\binom{9}{1}(x^2-x^3)+\binom{9}{2}(x^2-x^3)^2+$$
$$+\binom{9}{3}(x^2-x^3)^3+\binom{9}{4}(x^2-x^3)^4+\binom{9}{5}(x^2-x^3)^5+\ \ldots+(x^2-x^3)^9$$

Examinando los sumandos del segundo miembro, es fácil ver que x^8 figura solamente en el cuarto y quinto términos. Utilizando esto hallamos fácilmente el coeficiente de x^8. El es igual a $3\binom{9}{3}+\binom{9}{4}$.

172. Los sumandos de la suma dada forman una progresión con el denominador $1+x$. Por eso

$$(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\ldots+(1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^k}{x}. \qquad (1)$$

Escribiendo esta misma suma en forma del polinomio

$$a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots+a_nx^n,$$

y abriendo los paréntesis en el segundo miembro de la igualdad (1), obtendremos: si $m < k$, entonces

$$a_m=\binom{n+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}.$$

Si $m \geqslant k$, entonces

$$a_m=\binom{n+1}{m+1}.$$

173. De la condición del problema se desprende:

$$C_2(n)=C_1(n)+44, \quad \text{o} \quad \frac{n(n-1)}{2}=n+44.$$

Una vez resuelta esta ecuación respecto a n hallaremos que $n=11$.

El término común del desarrollo

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{11}$$

se puede escribir en la forma

$$C_m(11)\,x^{\frac{3}{2}(11-m)-4m}.$$

Por la condición del problema $\frac{3}{2}(11-m)-4m=0$, de donde $m=3$. Por consiguiente, el término buscado es igual a $C_3(11)$.

174. Hagamos $x+\frac{6}{x}=u$, entonces

$$\left(1+x+\frac{6}{x}\right)^{10}=(1+u)^{10}=1+\binom{10}{1}u+\binom{10}{2}u^2+\ldots+\binom{10}{10}u^{10},$$

donde

$$u^k=\left(x+\frac{6}{x}\right)^k=x^k+\binom{k}{1}x^{k-2}\cdot 6+\ldots+\binom{k}{s}x^{k-2s}\cdot 6^s+\ldots+\frac{6^k}{x^k}. \quad (1)$$

Para el sumando que no contiene x en la expresión (1) debe satisfacerse la condición $k-2s=0$; por consiguiente, este sumando será igual a $C_s(2s)\cdot 6^s$. Reuniendo todos los términos semejantes hallaremos que el sumando que no contiene x en la expresión inicial será igual a

$$1+\binom{10}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 6+\binom{10}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot 6^2+\binom{10}{6}\cdot\binom{6}{3}\cdot 6^3+\binom{10}{8}\cdot\binom{8}{4}\cdot 6^4+$$
$$+\binom{10}{10}\cdot\binom{10}{5}\cdot 6^5.$$

175. Las desigualdades $T_{k+1}>T_k$ y $T_{k+1}>T_{k+2}$, después de las simplificaciones correspondientes, toma la forma

$$\frac{\sqrt{3}}{k}>\frac{1}{101-k}, \qquad \frac{1}{100-k}>\frac{\sqrt{3}}{k+1}.$$

Una vez resuelta cada una de estas desigualdades con relación a k, obtendremos:

$$\frac{101\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}>k>\frac{100\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}. \quad (1)$$

Las partes izquierda y derecha de la desigualdad (1) son números no enteros y la diferencia entre ellas es igual a la unidad. Por eso, existe solamente un número entero k que satisface la desigualdad (1). Captando que $1{,}72<\sqrt{3}<1{,}73$, mediante el cálculo directo establecemos que

$$64{,}64>k>63{,}135.$$

Por consiguiente, $k=64$.

176. El término común del desarrollo es $T_{k+1}=C_k(n)\,a^k$. Si $T_k=T_{k+1}$, entonces $C_{k-1}(n)\,a^{k-1}=C_k(n)\,a^k$ o bien

$$\frac{n!\,a^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{n!\,a^k}{k!\,(n-k)!},$$

de donde

$$k=\frac{n+1}{1+\frac{1}{a}}.$$

Obtenemos la condición buscada: $1+\frac{1}{a}$ debe ser el divisor del número $n+1$.

Si ahora $T_k=T_{k+1}=T_{k+2}$, entonces, esto es equivalente a las igualdades

$$\frac{1}{(n-k+1)(n-k)}=\frac{a}{k(n-k)}=\frac{a^2}{k(k+1)}$$

o bien

$$\frac{k}{n-k+1}=a, \qquad \frac{k+1}{n-k}=a,$$

lo que conduce a la condición $n+1=0$, que es imposible de cumplir.

177. En el desarrollo entrarán: n términos tipo x_i^3 $(i=1, 2, \ldots, n)$, $n(n-1)$ términos del tipo $x_i^2x_j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n, i\neq j)$ y por fin $C_3(n)$ términos del tipo $x_ix_jx_k$, donde i, j y k son números diferentes. Así pues, el número de términos diferentes no semejantes entre sí es igual a

$$n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

178. Los divisores del número q son, por lo visto, los números $p_1, p_2, \ldots, p_k$ y todos los productos posibles por 2, por 3, etc. La cantidad de tales divisores es igual a

$$C_0(k)+C_1(k)+\ldots+C_k(k)=2^k.$$

El hecho de que todos los divisores obtenidos no son iguales entre sí y que no existen otros divisores se desprende de la unicidad de la representación de un número en forma del producto de números simples.

179. La igualdad a demostrar tiene la forma

$$1+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\ldots+\frac{\binom{n}{k}}{k+1}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

y es equivalente a la igualdad

$$1+(n+1)+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}+\ldots+$$
$$+\frac{n+1}{n}\binom{n}{n-1}+1=2^{n+1}.$$

Puesto que

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n+1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1},$$

el primer miembro de la última igualdad es igual a

$$1+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+1}{n}+1=(1+1)^{n+1}=2^{n+1},$$

con lo cual el problema queda demostrado.

180. El término cómun del primer miembro de la igualdad puede ser transformado de la manera siguiente:

$$k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=nx\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}=nx\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}.$$

Por eso, el primer miembro de la igualdad puede ser presentado en la forma siguiente:

$$nx\left[\binom{n-1}{0}(1-x)^{n-1}+\binom{n-1}{1}x(1-x)^{n-2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}x^{n-1}\right]=$$
$$=nx\,[x+1-x]^{n-1}=nx.$$

181. Toda división de la baraja, señalada en la condición, es equivalente a sacar 16 no ases de entre 32 no ases y dos ases de entre cuatro ases. La primera extracción puede realizarse por $C_{16}(32)$ métodos y la segunda por $C_2(4)$. Puesto que la sacada de 16 no ases puede ser combinada con cualquier sacada de dos ases, entonces, el número total de métodos de la división indicada de la baraja es igual a $C_{16}(32)\,C_2(4)$.

182. La cantidad buscada de números es igual a la cantidad de variaciones que se pueden formar de 10 cifras en series de 5, es decir es igual a $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=30\,240$

183. Enumeremos ciertos n sitios y formemos la división llenando sucesivamente cada uno de los sitios indicados con un par de elementos.

Al primer sitio el par puede ser elegido por $C_2(2n)$ métodos; una vez elegido el primer par, el segundo puede ser elegido por $C_2(2n-2)$ métodos, el tercero por $C_2(2n-4)$ etc. Como resultado obtendremos $C_2(2n)\,C_2(2n-2)\,C_2(2n-4)\,\ldots$ $\ldots C_2(2)$ divisiones entre las cuales, sin embargo, figurarán todas las divisiones que difieren por el orden de disposición de los pares. Por consiguiente, la cantidad de divisiones que nos interesan será igual a

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}=\frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3)\,\ldots\,2\cdot1}{2^n\,n!}=$$
$$=(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,3\cdot1.$$

En forma reducida esta multiplicación a veces se denota con el símbolo $(2n-1)!!$

Se puede obtener el mismo resultado razonando de distinta manera. Designemos por k_n el número de divisiones para el caso cuando la cantidad de elementos es igual a $2n$. Examinemos $2n$ elementos. Por cuanto el orden de disposición de los pares no tiene importancia, se puede considerar como primer par a aquél en el que figura el primer elemento. Los pares que contienen el primer elemento pueden ser formados por $2n-1$ métodos. Una vez elegido el primer par, los $2(n-1)$ elementos restantes pueden ser divididos en pares por k_{n-1} métodos. Por eso, $k_n=(2n-1)\,k_{n-1}$. Con ayuda de esta relación es fácil hallar que

$$k_n=(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots\,5\cdot3\cdot1.$$

184. De la cantidad total de $n!$ permutaciones debemos subtraer aquellas en las que los elementos a y b son vecinos. Para formar tal permutación es necesario tomar cierta permutación con los $n-2$ elementos restantes (en total son $(n-2)!$) y unirla a la permutación elegida con los elementos a y b de modo que resulten uno al lado del otro. Esto, por lo visto, se puede hacer por $2(n-1)$ métodos (el factor 2 está relacionado aquí con que a y b pueden ser cambiados de sitio). Así pues el número de permutaciones en las que a y b son vecinos es igual a $2(n-2)!(n-1)$ y el número de permutaciones que nos interesa es igual a

$$n!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2).$$

185. Si entre los 5 billetes sacados resultaron justo dos billetes premiados, entonces los otros tres serán no premiados. De 8 billetes premiados dos se pueden elegir por $C_2(8)$ métodos, de $50-8=42$ billetes no premiados tres se pueden elegir por $C_3(42)$ métodos. Cada método de elección de dos billetes premiados puede combinarse con cualquiera de los métodos de elección de tres no premiados. Por eso, el número total de métodos es igual a

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{42}{3}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{1\cdot 2\cdot 3}=326\,240$$

La cantidad de métodos de elección de 5 billetes entre los cuales por lo menos dos serán premiados es igual a la suma de las cantidades de métodos por los cuales se sacan justo dos premiados, justo tres premiados, justo cuatro premiados y justo cinco billetes premiados. Por consiguiente, esta cantidad es igual a

$$\binom{8}{2}\binom{42}{3}+\binom{8}{3}\binom{42}{2}+\binom{8}{4}\binom{42}{1}+\binom{8}{5}\cdot 1=$$
$$=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{42\cdot 41}{1\cdot 2}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{42}{1}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=$$
$$=326\,240+48\,216+2\,940+56=377\,452.$$

186. Primera resolución. Supongamos que en la recta superior se encuentran n puntos y en la inferior m puntos (fig. 1). Dividamos todos los segmentos de unión en haces de segmentos, con la particularidad de que en uno de los haces reunimos todos los segmentos que unen el punto fijado de la recta inferior (por ejemplo, el A) con todos los puntos de la recta superior. Está claro que la cantidad de tales haces es igual a m y que la cantidad de puntos de intersección de los segmentos pertenecientes a cualesquiera dos haces es la misma para cualquier par de haces. Si designamos esta cantidad por k_n, entonces la cantidad total de puntos de intersección de todos los segmentos será igual al producto de k_n por la cantidad de combinaciones de los haces en series de dos, es decir.

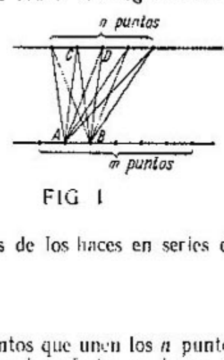

FIG 1

$$k_nC_2(m)=k_n\frac{m(m-1)}{2}$$

Para calcular el número k_n dividamos todos los segmentos que unen los n puntos de la recta superior con los dos puntos A y B de la recta inferior en haces de segmentos, reuniendo en un haz dos segmentos que unen el punto fijado de la recta superior (por ejemplo, el C) con los puntos A y B. El número de tales haces es igual a n y el número de puntos de intersección de los segmentos pertenecientes a dos haces es igual a la unidad (punto de intersección de las diagonales del trapecio $ABCD$). Por eso

$$k_n=C_2(n)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Por consiguiente, el número total de puntos de intersección de todos los segmentos que unen los n puntos de la recta superior con los m puntos de la recta inferior es igual a

$$\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{m(m-1)}{2}.$$

Segunda resolución. Cada punto de intersección de los segmentos puede ser obtenido eligiendo dos puntos en la primera recta, cosa que se puede hacer por $C_2(m)$ procedimientos, y dos puntos en la segunda recta, lo que se puede hacer por $C_2(n)$ procedimientos. Combinando todos los pares posibles de puntos, obtendremos

$$C_2(m)\cdot C_2(n)=\frac{m(m-1)\,n(n-1)}{4} \text{ puntos de intersección.}$$

187. Cada paralelogramo se determina con la elección de dos rectas de la primera serie, lo que se puede hacer por $C_2(n)$ procedimientos y con dos rectas de la segunda serie, cosa que se puede realizar por $C_2(m)$ procedimientos. De este modo, el número total de paralelogramos es igual a

$$C_2(n)\cdot C_2(m)=\frac{n(n-1)\,m(m-1)}{4}.$$

188. Puesto que en el alfabeto dado a cualquier signo por separado (punto o raya) y a cualquier par de signos le corresponde cierta letra, el número de procedimientos por los que se puede leer la cadena continua de x signos no depende de la construcción concreta de esta cadena y es igual al número de todas las divisiones posibles que forman la cadena de signos en grupos de uno o dos signos vecinos. Designemos este número por p_n.

Distribuyamos todos los métodos posibles en que se puede leer la cadena dada compuesta de n signos en dos categorías.

A la primera categoría referimos los métodos en los que el primer signo de la cadena se lee como una letra independiente. El número de métodos de la primera categoría es igual al número de métodos en que se puede leer la cadena compuesta de $n-1$ signos (que quedan después de eliminar el primero), es decir, igual a p_{n-1}.

A la segunda categoría referiremos los métodos en que los dos primeros signos se leen como una sola letra. El número de métodos de la segunda categoría es igual al número de métodos en que se lee la cadena compuesta de $n-2$ signos (que quedaron después de eliminar los dos primeros), es decir, igual a p_{n-2}.

Puesto que cada método de lectura de la cadena dada pertenece a una, y sólo a una, de las dos categorías indicadas, el número total de métodos es igual a la suma de los números de métodos de la primera y segunda categorías, es decir,

$$p_n=p_{n-1}+p_{n-2}. \qquad (1)$$

Esta igualdad representa una fórmula de recurrencia por la que se puede calcular sucesivamente p_n para cualquier n, si se conoce p_1 y p_2. Pero en el problema dado $p_1=1$ (para la cadena de un signo existe sólo un método de la primera categoría) y $p_2=2$ (para la cadena compuesta de dos signos existen dos métodos: uno de la primera categoría y otro de la segunda).

Empleando la fórmula (1), hallaremos sucesivamente:

$$p_3=p_2+p_1=2+1=3,$$
$$p_4=p_3+p_2=3+2=5,$$
$$p_5=p_4+p_3=5+3=8$$

y así sucesivamente. Definitivamente obtendremos:

$$p_{12}=233.$$

6. Planteamiento de ecuaciones

189. Supongamos que sea x el menor de los factores. Entonces, de las condiciones del problema se desprende directamente que

$$x(x+10)-40=39x+22$$

o bien

$$x^2-29x-62=0,$$

de donde $x_1=31$, $x_2=-2$. Prescindimos de la raiz negativa, por consiguiente, los factores son 31 y 41.

190. Hasta el primer encuentro el primer ciclista recorrió $s+a$ km y el segundo $s-a$ km, donde s es la distancia de A a B. Hasta el segundo encuentro los ciclistas recorrieron respectivamente

$$2s+\frac{1}{k}s \quad \text{y} \quad 2s-\frac{1}{k}s \text{ km.}$$

Pero si dos cuerpos se mueven a velocidades constantes, entonces la relación de las velocidades de los cuerpos, siendo iguales los tiempos consumidos, es igual a la relación de los caminos recorridos por ellos. Por eso, para la determinación de s tenemos la ecuación

$$\frac{s+a}{s-a}=\frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}$$

De aqui $s=2ak$ km.

191. Si dos cuerpos se mueven con velocidades constantes, entonces, en un mismo trayecto del camino, la relación de sus velocidades es inversamente proporcional al tiempo consumido por los cuerpos. Supongamos que sea v la velocidad del tercer automóvil; t, el tiempo de movimiento del segundo automóvil hasta el momento en que le alcanza el tercero. Entonces,

$$\frac{40}{v}=\frac{t-0{,}5}{t}, \quad \frac{50}{v}=\frac{t+1}{t+1{,}5}.$$

Dividiendo miembro a miembro la primera ecuación por la segunda hallaremos que $t=\frac{3}{2}$ de hora; luego hallamos que $v=60$ km/h.

192. Supongamos que hasta el momento de encuentro pasaron x horas. El camino desde el punto de encuentro hasta el punto B el ciclista lo pasó en x horas y el transeúnte en $x+t$ horas. Puesto que para un mismo camino el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad, entonces

$$\frac{x+t}{x}=k,$$

de aqui

$$x=\frac{t}{k-1}.$$

193. Designemos la distancia de A a B por x y la distancia entre B y C por y. Entonces, teniendo en cuenta que en todos los casos de que se habla en el problema el tiempo de movimiento es el mismo, obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3{,}5}+\frac{y}{4}&=\frac{x+y}{3{,}75} \\ \frac{x+y}{3{,}75}&=\frac{14}{60}+\frac{y}{3{,}75}+\frac{x}{4}. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema hallamos que $x=14$ km e $y=16$ km.

194. Sea x la longitud del camino por el lugar llano, y la longitud del camino cuesta arriba. Tenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{3}+\frac{x}{4}+\frac{11{,}5-(x+y)}{5}&=2\frac{9}{10},\\ \frac{11{,}5-(x+y)}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{5}&=3\frac{1}{10}\end{aligned}\right\}$$

Sumando las ecuaciones del sistema hallaremos que $x=4$.

195. Designemos por l la distancia entre los puntos A y B y por v_1 y v_2 las velocidades de las motocicletas. En el tiempo t la primera motocicleta pasó el camino igual a $p+l-q$ y la segunda el camino $q+l-p$. Por eso,

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{l+p-q}{t},\\ v_2&=\frac{l+q-p}{t}.\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Por otro lado, la relación de las velocidades es igual a la relación de los caminos recorridos hasta el primer encuentro, es decir,

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{l-p}{p}.$$

Colocando aquí v_1 y v_2 del sistema (1), obtendremos la ecuación para la determinacion de l. Resolviéndola hallaremos que $l=3p-q$. Colocando este valor de l en la fórmula (1), obtendremos:

$$v_1=\frac{4p-2q}{t},\qquad v_2=\frac{2p}{t}.$$

196. La diferencia entre los tiempos de retraso del avión en el primer y segundo vuelos igual a $\frac{t_1-t_2}{60}$ horas está enlazada con que el camino de d km fue recorrido a distintas velocidades: en el primer vuelo la velocidad era v km/h y en el segundo w km/h (en los demás trayectos del camino las velocidades eran respectivamente iguales). De aquí obtenemos la ecuación

$$\frac{t_1-t_2}{60}=\frac{d}{v}-\frac{d}{w},$$

de la que hallamos que la velocidad inicial del avión es igual a

$$w=\frac{60vd}{60d+v(t_2-t_1)}\ \text{km/h}.$$

197. Designemos el peso del pedazo cortado por x. Supongamos que la primera aleación contenía 100 a% de cobre y la segunda 100 b%. Entonces la cantidad en peso de cobre en la primera aleación después de fundir su resto con el pedazo cortado de la segunda aleación será igual a $a(m-x)+bx$ y el peso de cobre en la segunda aleación después de fundir su resto con el pedazo cortado de la primera será igual a $b(n-x)+ax$. De la condición del problema

$$\frac{a(m-x)+bx}{m}=\frac{b(n-x)+ax}{n}.$$

Una vez resuelta esta ecuación, obtenemos (teniendo en cuenta que $a\neq b$):

$$x=\frac{mn}{m+n}.$$

198. Supongamos que la relación de los pesos de los pedazos a alear es igual a $\alpha:\beta$.
Entonces

$$\frac{\frac{\alpha p}{100}+\frac{\beta q}{100}}{\alpha+\beta}=\frac{r}{100}.$$

De aquí obtenemos:

$$\alpha:\beta=(r-q):(p-r).$$

La resolución es posible si $p>r>q$ o bien $p<r<q$.

Para hallar el peso máximo de la nueva aleación examinemos las relaciones

$$\frac{P}{|r-q|} \quad \text{y} \quad \frac{Q}{|p-r|}.$$

Si $\frac{P}{|r-q|}=\frac{Q}{|p-r|}$, entonces, el peso máximo es igual a

$$P+Q=\frac{p-q}{r-q}P=\frac{p-q}{p-r}Q.$$

Si $\frac{P}{|r-q|}<\frac{Q}{|p-r|}$, entonces, el peso máximo es igual a

$$P+\frac{p-r}{r-q}P=\frac{p-q}{r-q}P.$$

Si por fin $\frac{P}{|r-q|}>\frac{Q}{p-r}$, entonces, el peso máximo es igual a

$$Q+\frac{r-q}{p-r}Q=\frac{p-q}{p-r}Q$$

199. Supongamos que cada obrero trabajó t días y que A ganó x rublos y B ganó y rublos. De las condiciones del problema obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (t-1)\frac{x}{t}&=72,\\ (t-7)\frac{y}{t}&=64{,}8,\\ (t-1)\frac{y}{t}-(t-7)\frac{x}{t}&=32{,}4. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

De las dos primeras ecuaciones hallamos:

$$\frac{t-1}{t}=\frac{72}{x}, \quad \frac{t-7}{t}=\frac{64{,}8}{y}.$$

Entonces, de la última ecuación obtenemos:

$$72\frac{y}{x}-64{,}8\frac{x}{y}=32{,}4,$$

o bien

$$20\left(\frac{y}{x}\right)^2-9\left(\frac{y}{x}\right)-18=0.$$

De aquí $y=\frac{6}{5}x$ (prescendimos de la raíz negativa). Dividiendo ahora la segunda ecuación del sistema (1) por la primera y sustituyendo $\frac{y}{x}$ por su valor, hallamos:

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{t-7}{t-1}=\frac{64,8}{72}, \quad \frac{t-7}{t-1}=\frac{3}{4}.$$

De aquí $t=25$ y, por consiguiente,

$$x=75 \text{ rublos}, \quad y=90 \text{ rublos}.$$

200. Designemos por t_1 el tiempo transcurrido hasta el primer encuentro, por t_2 el intervalo de tiempo hasta el segundo encuentro y por R el radio de la circunferencia. En el intervalo de tiempo t_1 el primer cuerpo recorrió el camino vt_1 y el segundo, el camino $\frac{at_1^2}{2}$. La suma de estos caminos es igual a la longitud de la circunferencia, por lo tanto,

$$vt_1+\frac{at_1^2}{2}=2\pi R. \tag{1}$$

En el intervalo de tiempo t_2 ambos cuerpos recorrieron un mismo camino iguar a la longitud de la curcunferencia, así que

$$vt_2=2\pi R, \quad \frac{at_2^2}{2}=2\pi R.$$

Eliminando de aquí t_2, hallaremos que $R=\frac{v^2}{\pi a}$. Colocando este valor de R en la fórmula (1) obtendremos la siguiente ecuación cuadrada respecto a t_1:

$$\frac{at_1^2}{2}+vt_1-\frac{2v^2}{a}=0.$$

Resolviendo esta ecuación y prescindiendo de la raíz negativa (puesto que pol el sentido del problema debe ser $t_1>0$), obtendremos definitivamente:

$$t_1=(\sqrt{5}-1)\frac{v}{a}$$

201. Designemos por q_1 y q_2 las capacidades de los grifos (en l/min) y por v el volumen de la piscina. El tiempo requerido para llenar la piscina haciendo uso de cada grifo por separado sera igual a

$$t_1=\frac{v}{q_1}, \quad t_2=\frac{v}{q_2}. \tag{1}$$

La primera condición del problema conduce a la ecuación

$$q_1\cdot\frac{1}{3}t_2+q_2\cdot\frac{1}{3}t_1=\frac{13}{18}v.$$

Empleando la igualdad (1) obtenemos la ecuación cuadrada

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2-\frac{13}{6}\frac{q_1}{q_2}+1=0,$$

cuyas soluciones serán $\frac{q_1}{q_2}=\frac{2}{3}$, $\frac{q_1}{q_2}=\frac{3}{2}$. De la segunda condición del problema se desprende que

$$v=(3\cdot 60+36)(q_1+q_2)=216(q_1+q_2).$$

De (1) hallamos las magnitudes buscadas:

$$t_1=\frac{216\,(q_1+q_2)}{q_1}=540 \text{ min (9horas)},$$

$$t_2=\frac{216\,(q_1+q_2)}{q_2}=360 \text{ min (6 horas)}.$$

Existe una segunda solución:

$$t_1=360 \text{ min}, \quad t_2=540 \text{ min}.$$

202. Anotemos con γ el peso específico del agua y con s el área de la sección transversal del tubo. La presión atmosférica p_a se halla con ayuda de la fórmula

$$p_a=\gamma c.$$

Si p_1 es la presión bajo el pistón en su posición superior, entonces, según la ley de Boyle-Mariotte, para el aire contenido entre el pistón y el nivel del agua,

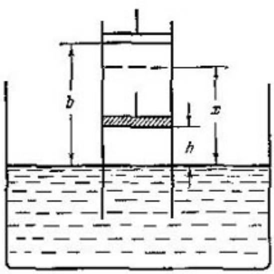

FIG. 2

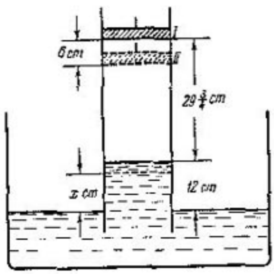

FIG. 3

tenemos que $p_1(b-x)s=p_ahs$ (fig. 2). La ecuación de equilibrio de la columna de líquido tiene la forma $p_a-p_1=\gamma x$. Esto conduce a la ecuación

$$c-\frac{hc}{b-x}=x$$

(γ se simplifica), es decir, conduce a la ecuación cuadrada

$$x^2-(b+c)\,x+(b-h)\,c=0.$$

De aqui hallamos que

$$x=\frac{1}{2}\left[(b+c)-\sqrt{(b-c)^2+4hc}\right].$$

203. Sean p_1 y p_2 las presiones del aire que se encuentra bajo el pistón en las posiciones I y II respectivamente (fig. 3) y γ, el peso específico del mercurio. Las ecuaciones de equilibrio de las columnas de mercurio de 12 cm y x cm pe altura serán respectivamente

$$\left.\begin{aligned}76\gamma-p_1&=12\gamma,\\ 76\gamma-p_2&=x\gamma.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La ley de Boyle-Mariotte para el aire que se encuentra bajo el pistón da la ecuación

$$p_1\cdot 29\,\frac{3}{4}=p_2\,(36-x).$$

Colocando aquí las expresiones para p_1 y p_2 de (1), obtendremos la siguiente ecuación cuadrada respecto a x:

$$29\frac{3}{4}\cdot 64=(76-x)(36-x),$$

o bien

$$x^2-112x+832=0.$$

De aquí $x=56\pm\sqrt{3136-832}=56\pm\sqrt{2304}=56\pm 48$, es decir, $x=8$ cm.

204. Supongamos que el reloj se adelanta en x minutos al día. Entonces, él marcará el tiempo exacto a los $\frac{2}{x}$ días. Si el reloj marcase 3 min menos, pero se adelantara en $x+\frac{1}{2}$ minutos al día, entonces, marcaría la hora exacta a los $\frac{3}{x+\frac{1}{2}}$ días. Por consiguiente,

$$\frac{3}{x+\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{x},$$

de donde

$$x^2+\frac{3}{2}x-1=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallaremos que $x=0,5$.

205. Si x es la cantidad inicial de los depositantes e y es el porcentaje que paga la caja de ahorros, entonces

$$x+x\frac{y}{100}\frac{m}{12}=p, \qquad x+x\frac{y}{100}\frac{n}{12}=q.$$

Multiplicando la primera ecuación por n, la segunda por m y substrayendo de la primera la segunda, hallaremos:

$$x=\frac{pn-qm}{n-m}.$$

Volviendo de nuevo al sistema inicial y restando de la primera ecuación la segunda, obtendremos:

$$\frac{xy}{1200}(m-n)=p-q.$$

De aquí

$$y=\frac{1200(p-q)}{qm-pn}\ \%.$$

206. Anotemos con v_1 y v_2 las velocidades de los puntos y supongamos que sea $v_1>v_2$. La primera condición del problema nos da la ecuación

$$\frac{2\pi R}{v_2}-\frac{2\pi R}{v_1}=t.$$

La segunda condición significa que durante el intervalo de tiempo T, el punto que se desplaza a mayor velocidad recorrerá por la circunferencia un camino en $2\pi R$ mayor que el otro punto. Esto nos da la segunda ecuación

$$Tv_1-Tv_2=2\pi R.$$

De la segunda ecuación hallamos:

$$v_2 = v_1 - \frac{2\pi R}{T}.$$

Colocando esta expresión para v_2 en la primera ecuación, obtendremos la siguiente ecuación cuadrada respecto a v_1:

$$v_1^2 - \frac{2\pi R}{T} v_1 - \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{2\pi R}{t} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$v_1 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} + 1\right)$$

y, a continuación,

$$v_2 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} - 1\right).$$

207. Supongamos que sea v el volumen de solución en el frasco y x, el porcentaje de sal en la solución.

A la probeta se vierte $\frac{v}{n}$ de solución y se concentra por evaporación hasta que el porcentaje de sal en ésta aumente el doble. Puesto que la cantidad de sal en este caso no varía, entonces, el volumen de solución en la probeta disminuirá dos veces y el peso del agua evaporada será igual a $\frac{v}{2n}$.

Después de echar de nuevo la solución concentrada al frasco, en éste habrá la misma cantidad de sal que al principio, es decir, $v\frac{x}{100}$ pero la cantidad de solución disminuye en $\frac{v}{2n}$. De aquí obtenemos la ecuación

$$\frac{v\frac{x}{100}}{v - \frac{v}{2n}} = \frac{x+p}{100},$$

de la que hallamos que

$$x = (2n - 1)\,p.$$

208. Supongamos que en el primer recipiente había x litros de alcohol; entonces en el segundo habrá $30 - x$ litros. Después de llenar el primer recipiente con agua, un litro de la mezcla obtenida contenía $\frac{x}{30}$ de alcohol y $1 - \frac{x}{30}$ de agua. Después de llenar el segundo recipiente con la mezcla obtenida en el primero, en el segundo recipiente resultaron $30 - x + \frac{x}{30}x$ litros de alcohol y $\left(1 - \frac{x}{30}\right)x$ litros de agua. Un litro de esta nueva mezcla contiene

$$1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2 \text{ litros de alcohol.}$$

Después de echar 12 litros de la nueva mezcla al primer recipiente, en éste resultaron

$$12\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + \frac{x}{30}(30 - x) \text{ litros de alcohol}$$

y en el segundo

$$18\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \text{ litros de alcohol.}$$

Según la condición del problema

$$18\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]+2=12\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]+x-\frac{x^2}{30},$$

de donde obtenemos la ecuación

$$x^2-30x+200=0.$$

Esta ecuación tiene las raíces

$$x_1=20, \qquad x_2=10.$$

Así pues, en el primer recipiente había o bien 20 l (entonces en el segundo había 10 l), o bien 10 l (entonces en el segundo había 20 l).

209. Supongamos que sea x la distancia desde la orilla de partida hasta el punto en que C dejó el bote. Señalemos al principio que A subió al bote a la misma distancia hasta la segunda orilla (la orilla opuesta). En efecto, la manera en que A y C vencieron el paso difiere solamente en que C al principio lo pasó en el bote y después a nado y A al contrario. Puesto que los dos nadan a una misma velocidad v, además, $v \neq v_1$ y el tiempo que pierden en realizar el paso es el mismo, entonces, por lo visto, las distancias indicadas deberán ser iguales.

Después de esta observación es fácil componer la ecuación

$$\frac{x+s-2(s-x)}{v_1}=\frac{s-x}{v}.$$

Aquí el primer miembro expresa el tiempo que pierde el bote en vencer el camino hasta el encuentro con A y el segundo miembro, el tiempo consumido por A hasta el encuentro con el bote.

De la ecuación obtenida hallamos:

$$x=\frac{s(v+v_1)}{3v+v_1}.$$

De aquí, el tiempo consumido en el paso es igual a

$$T=\frac{s-x}{v}+\frac{x}{v_1}=\frac{s}{v_1}\,\frac{v+3v_1}{3v+v_1}.$$

Observación. Se hubiera podido resolver el problema sin la observación preliminar sobre la igualdad de las distancias indicadas más arriba. Sin embargo, en este caso, hubiera sido necesario introducir varias incógnitas y la resolución hubiera resultado más dificultosa.

210. Designemos la distancia buscada por s km y la velocidad del tren por v km/h. En las 6 horas hasta su parada, provocada por la acumulación de nieve, el tren recorrió $6v$ km y el trayecto restante del camino de $(s-6v)$ km de longitud lo pasó en $\frac{5(s-6v)}{6v}$ horas, ya que la velocidad del tren en este trayecto del camino era $\frac{6}{5}v$.

En total el tren estuvo en camino $8+\frac{5(s-6v)}{6v}$ horas (teniendo en cuenta las dos horas de parada forzosa). Este número de horas constituye una hora más de las $\frac{s}{v}$ horas previstas por el horario. De este modo obtenemos la ecuación

$$8+\frac{5(s-6v)}{6v}=1+\frac{s}{v}.$$

Desarrollando un razonamiento análogo respecto al segundo tren, compongamos una ecuación más:

$$\frac{s}{v}+\frac{3}{2}=8+\frac{150}{v}+\frac{5(s-6v-150)}{6v}.$$

De este sistema de ecuaciones hallamos que $s=600$ km.

211. Designando la velocidad del bote en agua muerta por v y la velocidad de la corriente por w, obtendremos un sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{v+w}+\frac{a}{v-w}&=T,\\ \frac{a}{v-w}=T_0+\frac{a-b}{v+w}+\frac{2b}{v+w}&=T_0+\frac{a+b}{v+w}.\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema respecto a las incógnitas $\frac{1}{v+w}$ y $\frac{1}{v-w}$ y tomando sus recíprocas, hallamos:

$$v+w=\frac{2a+b}{T-T_0} \quad \text{y} \quad v-w=\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}$$

De aquí se desprende que

$$v=\frac{1}{2}\left[\frac{2a+b}{T-T_0}+\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}\right],$$

$$w=\frac{1}{2}\left[\frac{2a+b}{T-T_0}-\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}\right].$$

212. Sea x el tiempo que permaneció abierto el segundo grifo, v, la velocidad de salida del agua del primer grifo y w, la velocidad de salida del agua del segundo grifo (v y w se miden en m^3/h). Tenemos:

$$\left.\begin{aligned}v(x+5)+wx&=425,\\ 2vx&=w(x+5),\\ (v+w)\,17&=425.\end{aligned}\right\}$$

De la segunda y tercera ecuaciones obtenemos:

$$v=25\,\frac{x+5}{3x+5}; \qquad w=\frac{50x}{3x+5}.$$

Colocando estas expresiones en la primera ecuación, hallamos:

$$3x^2-41x-60=0,$$

de donde $x=15$ h (la segunda raíz por ser negativa no vale)

213. Designemos la velocidad buscada del tren por v km/h y la velocidad según el gráfico por v_1 km/h. El tren pasó la primera mitad del camino en $\frac{10}{v_1}$ horas y en vencer la segunda mitad y en la parada perdió la primera vez $\frac{10}{v_1+10}+\frac{1}{20}$ horas y la segunda $\frac{10}{v}+\frac{1}{12}$ horas. Pero como ambas veces el tren llegó a B a tiempo, entonces,

$$\frac{10}{v_1}=\frac{10}{v_1+10}+\frac{1}{20}, \qquad \frac{10}{v_1}=\frac{10}{v}+\frac{1}{12}.$$

De la primera ecuación hallaremos v_1:

$$10\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_1+10}\right)=\frac{1}{20}, \qquad \frac{100}{v_1(v_1+10)}=\frac{1}{20},$$

$$v_1^2+10v_1-2000=0.$$

Esta ecuación tiene sólo una raíz positiva $v_1=40$.

De la segunda ecuación hallaremos que $v=60$ km/h.

214. Sea la distancia AB igual a s km y las velocidades del primero y segundo aviones iguales respectivamente a v_1 y v_2. Entonces, en virtud de las condiciones del problema tenemos un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{2v_1}+\dfrac{a}{v_1}=\dfrac{s}{2v_2}-\dfrac{a}{v_2}, \\ \dfrac{s}{2v_2}-\dfrac{s}{2v_1}=b, \\ \dfrac{3s}{4v_1}-b=\dfrac{s}{4v_2}. \end{array}\right\}$$

Hagamos

$$\frac{s}{2v_1}=x, \qquad \frac{s}{2v_2}=y.$$

De la segunda y tercera ecuaciones hallamos:

$$x=\frac{3}{2}b, \qquad y=\frac{5}{2}b$$

y de la primera:

$$a\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=b.$$

Pero,

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{x}{y}=\frac{3}{5}.$$

Ahora es fácil hallar que

$$v_1=\frac{8a}{3b}, \qquad v_2=\frac{8a}{5b} \quad \text{y} \quad s=8a.$$

215. Sea u la velocidad del bote en agua muerta y v la velocidad de la corriente. Entonces tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{96}{u+v}+\dfrac{96}{u-v}=14, \\ \dfrac{24}{v}=\dfrac{96}{u+v}+\dfrac{72}{u-v}. \end{array}\right\}$$

Para su resolución hagamos $\frac{u}{v}=z$. Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por v, hallaremos:

$$24=\frac{96}{z+1}+\frac{72}{z-1}.$$

Liberándonos de los denominadores, obtenemos:

$$24z^2 - 168z = 0.$$

Puesto que $z \neq 0$, entonces $z = 7$. Por consiguiente, $u = 7v$. Colocando $u = 7v$ en la primera ecuación del sistema, hallamos:

$$\frac{96}{8v} + \frac{96}{6v} = 14,$$

de donde

$$v = 2 \text{ km/h}, \quad u = 14 \text{ km/h}.$$

216. El camino recorrido por cada cuerpo en t s se determina por la fórmula

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Para hallar v_0 y a para cada uno de los cuerpos, colocamos en esta fórmula los datos numéricos citados en las condiciones del problema:

1) para el primer cuerpo:

para $t = 1$ tenemos que $25 = v_0 + \frac{a}{2}$,

para $t = 2$ tenemos que $50\frac{1}{3} = 2v_0 + 2a$;

de aquí $a = \frac{1}{3}$, $v_0 = 25 - \frac{1}{6}$ y $s_1 = 24\frac{5}{6}t + \frac{t^2}{6}$;

2) para el segundo cuerpo:

para $t = 1$ tenemos que $30 = v_0 + \frac{a}{2}$,

para $t = 2$ tenemos que $59\frac{1}{2} = 2v_0 + 2a$;

de aquí $a = -\frac{1}{2}$, $v_0 = 30 + \frac{1}{4}$ y $s_2 = 30\frac{1}{4}t - \frac{t^2}{4}$.

En el momento en que el primer cuerpo alcanza al segundo tendremos que $s_1 = s_2 + 20$; de aquí obtenemos la ecuación cuadrada para la determinación de t:

$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos que $t = 16$. Prescindimos de la segunda raíz, ya que es negativa.

217. Supongamos que sea v la propia velocidad de la lancha. Entonces, el tiempo en que se encuentra en movimiento la lancha será igual a

$$t = \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1}.$$

Por la condición del problema tenemos.

$$3 \leqslant \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1} \leqslant 4. \qquad (1)$$

Es necesario que sea $v > 1$, puesto que de lo contrario la lancha no podrá moverse río arriba. Pasemos del sistema de desigualdades (1) al siguiente sistema equivalente:

$$3(v^2 - 1) \leqslant 16v - 4 \leqslant 4(v^2 - 1).$$

Así pues, es necesario que se cumplan a la vez dos desigualdades:

$$3v^2-16v+1\leqslant 0$$

y

$$4v^2-16v\geqslant 0.$$

La primera desigualdad queda satisfecha si

$$\frac{8-\sqrt{61}}{3}\leqslant v\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}.$$

La segunda desigualdad se satisface si $v<0$ o bien $v>4$. Pero, puesto que $v>1$, tenemos definitivamente:

$$4\leqslant v\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}.$$

218. Designemos por x el volumen de agua en el recipiente A antes del transvase. Entonces el volumen inicial de agua en los recipientes B y C será igual a $2x$ y $3x$ respectivamente y el volumen total de agua será $x+2x+3x=6x$.

Después del primer transvase de A a B y de B a C la profundidad en los tres recipientes se hizo igual y, por lo tanto, los volúmenes de agua son entre sí como las áreas de la base, es decir, como 1:4:9. Por eso, después del primer transvase los volúmenes de agua en los recipientes A, B y C tendrán respectivamente los siguientes valores:

$$1\cdot\frac{6x}{1+4+9}=\frac{3}{7}x,\qquad 4\cdot\frac{6x}{1+4+9}=\frac{12}{7}x,$$

$$9\cdot\frac{6x}{1+4+9}+\frac{27}{7}x.$$

Después del segundo transvase de C a B estos volúmenes se hacen respectivamente iguales a

$$\frac{3}{7}x,\qquad \frac{12}{7}x+128\frac{4}{7},\qquad \frac{27}{7}x-128\frac{4}{7}.$$

Después del tercer transvase de B a A el volumen de agua en A resultó igual a $x-100$ y en B igual a

$$\frac{1}{2}(x-100)\cdot 4=2(x-100).$$

Sumando los volúmenes de agua en todos los recipientes obtenemos una ecuación de primer grado respecto a x:

$$(x-100)+2(x-100)+\frac{27}{7}x-128\frac{4}{7}=6x.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$x=500.$$

Así pues, la cantidad inicial de agua en cada uno de los recipientes era la siguiente:

en A, 500 l,
en B, 1000 l,
en C, 1500 l.

219. Supongamos que el número buscado tiene la forma $xyzt$ (aquí las letras x, y, z y t significan cifras de los órdenes correspondientes). Según las condiciones del problema obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x^2+t^2&=13,\\ y^2+z^2&=85,\\ xyzt-1089&=tzyx. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En virtud de la substracción por orden, en la tercera ecuación del sistema (1) ó $t=9$, o bien

$$(10+t)-9=x,$$

es decir,

$$x=t+1. \qquad (2)$$

Pero, de la primera ecuación del sistema (1) se desprende que $t<4$ y, por lo tanto, tiene lugar la igualdad (2). Entonces, de la primera ecuación del sistema (1) obtenemos la siguiente ecuación para la determinación de t:

$$(t+1)^2+t^2=13,$$

de donde

$$t=2.$$

De la fórmula (2), ahora se desprende que $x=3$ y la tercera ecuación del sistema (1) toma la forma

$$3yz2-1089=2zy3. \qquad (3)$$

Observemos a continuación que $z<9$ (si $z=9$, entonces, de la fórmula (3) se desprende que $y=0$, pero en este caso no se satisface la segunda ecuación del sistema (1)). De la fórmula (3) hallamos:

$$(z-1+10)-8=y,$$

o sea,

$$z=y-1. \qquad (4)$$

Por fin, de la segunda ecuación del sistema (1) y de (4) hallamos que $z=6$ e $y=7$. Así pues, el número buscado es 3762.

220. Al principio hallamos la distancia x desde el punto de partida hasta el lugar del primer encuentro. La ecuación del tiempo de movimiento de ambos puntos tiene la forma

$$\frac{a+x}{v}-t=\frac{x}{w},$$

de donde

$$x=\frac{(a-vt)\,w}{v-w}.$$

Desde el inicio del movimiento hasta el primer encuentro pasó un tiempo igual a

$$t_1=\frac{a+x}{v}.$$

Colocando aquí el valor hallado de x, obtendremos:

$$t_1=\frac{1-wt}{v-w}.$$

Sea τ la integral del tiempo entre dos encuentros consecutivos. Entonces

$$v\tau-w\tau=l,$$

de donde

$$\tau=\frac{l}{v-w}.$$

Los encuentros sucesivos tendrán lugar en los momentos de tiempo t_1, $t_1+\tau$, $t_1+2\tau$, ... El momento del enésimo encuentro será

$$t_n=\frac{v-wt+l(n-1)}{v-w}.$$

221. Designemos el peso específico del primero de los metales que componen la aleación por γ_1, el del segundo por γ_2 y el del agua por γ. Supongamos que sea x el peso del primer metal en la aleación. Según el principio de Arquímedes la pérdida de peso de la aleación en el agua será igual a

$$\left(\frac{x}{\gamma_1}+\frac{P-x}{\gamma_2}\right)\gamma.$$

Análogamente para los metales puros esta pérdida será igual a

$$\frac{P}{\gamma_1}\gamma \quad \text{y} \quad \frac{P}{\gamma_2}\gamma.$$

Estas pérdidas son conocidas e iguales respectivamente a B y C. De aquí hallamos que

$$\frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{B}{P}; \qquad \frac{\gamma}{\gamma_2}=\frac{C}{P}.$$

Por consiguiente, la pérdida en peso de la aleación es igual a

$$A=\frac{B}{P}x+\frac{C}{P}(P-x).$$

De aquí

$$x=\frac{A-C}{B-C}P.$$

Para la solubilidad del problema es necesario que $B\neq C$. A continuación del hecho de que $\frac{x}{P}$ es un número incluido entre 0 y 1, se deriva la desigualdad

$$0<\frac{A-C}{B-C}<1.$$

De aquí se desprende que o bien $B>A>C$, o bien $C>A>B$. Así pues, para que el problema sea soluble, es necesario y suficiente que el número A esté incluido entre los números B y C

222. Designemos la distancia desde el punto A hasta la desembocadura del río por s, la distancia desde la desembocadura del río por el lago hasta el punto B por s_1, la velocidad del barco (sin remolque) por v y la velocidad de la corriente del río por v_1.

Hace falta determinar $\frac{2s_1}{v}=x$.

De las condiciones del problema componemos tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\frac{s}{v+v_1}+\frac{x}{2}&=61,\\ \frac{s}{v-v_1}+\frac{x}{2}&=79,\\ \frac{s}{v_1}+x&=411.\end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación tenemos que

$$\frac{v+v_1}{s}=\frac{2}{122-x}, \tag{1}$$

de la segunda ecuación hallaremos:

$$\frac{v-v_1}{s}=\frac{2}{158-x}, \tag{2}$$

de la tercera ecuación obtenemos:

$$\frac{v_1}{s}=\frac{1}{411-x}. \tag{3}$$

Substrayendo de la igualdad (1) la igualdad (2) y valiéndonos de la igualdad (3), obtendremos la siguiente ecuación respecto a x:

$$\frac{1}{122-x}-\frac{1}{158-x}=\frac{1}{411-x},$$

o bien

$$x^2-244y+4480=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallaremos:

$$x_1=20, \quad x_2=224.$$

Por lo visto, el valor $x_2=224$ no sirve, puesto que el primer miembro de la ecuación (1) no puede ser negativo.

223. Designemos la distancia AB por s y la distancia BC por s_1; supongamos a continuación que sea v la velocidad de la lancha y v_1 la velocidad de la corriente (se supone que s y s_1 se expresan en unas mismas unidades de longitud; v y v_1 son velocidades calculadas por hora).

Para el movimiento de la lancha río abajo desde A hasta C tenemos:

$$\frac{s}{v}+\frac{s_1}{v+v_1}=6. \tag{1}$$

Para el movimiento de la lancha río arriba desde C hasta A tenemos:

$$\frac{s_1}{v-v_1}+\frac{s}{v}=7. \tag{2}$$

Con la condición de que en el trozo AB la corriente es la misma que en el trozo BC, el camino AC requiere

$$\frac{s+s_1}{v+v_1}=5,5 \text{ horas}. \tag{3}$$

Es necesario determinar la relación $\frac{s+s_1}{v-v_1}$.

Reduciendo las ecuaciones (1), (2) y (3) a un denominador común y multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por $v \neq 0$, obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned}(s+s_1)\,v&=6v\,(v+v_1)-sv_1,\\(s+s_1)\,v&=7v\,(v-v_1)+sv_1,\\(s+s_1)\,v&=5,5\,(v+v_1)\,v.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y haciendo uso de la tercera, obtendremos:

$$2\,(s+s_1)\,v=v\,(13v-v_1)=11v\,(v+v_1).$$

De aquí, $v=6v_1$. Pero de la tercera ecuación del sistema (4) tenemos que

$$\frac{s+s_1}{v_1}=7\cdot 5,5.$$

Por consiguiente,

$$\frac{s+s_1}{v-v_1}=\frac{s+s_1}{5v_1}=7,7 \text{ horas.}$$

224. Designemos por v la capacidad del vaso y sea α_1 el contenido de ácido en porcientos en él después del primer mezclado, α_2 el contenido de ácido en porcientos después del segundo mezclado etc. Tenemos:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(v-a)\,p+aq}{v}=\alpha_1,\\&\frac{(v-a)\,\alpha_1+aq}{v}=\alpha_2,\\&\dots\dots\dots\dots\\&\frac{(v-a)\,\alpha_{k-2}+aq}{v}=\alpha_{k-1},\\&\frac{(v-a)\,\alpha_{k-1}+aq}{v}=r\end{aligned}\right\}$$

Multiplicando la s-ésima ecuación por $\left(\frac{v-a}{v}\right)^{k-s}$ y efectuando la suma, obtenemos

$$\left(\frac{v-a}{v}\right)^k p+\frac{a}{v}\,q\left[1+\frac{v-a}{v}+\left(\frac{v-a}{v}\right)^2+\ldots+\left(\frac{v-a}{v}\right)^{k-1}\right]=r.$$

De aquí

$$\left(\frac{v-a}{v}\right)^k p+\frac{a}{v}\,q\,\frac{\left(\frac{v-a}{v}\right)^k-1}{\frac{v-a}{v}-1}=r$$

y, por consiguiente,

$$\left(1-\frac{a}{v}\right)^k(p-q)=r-q.$$

Respuesta:

$$v=\frac{a}{1-\sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}}.$$

225. Al final del primer año el depósito aumentó en $\frac{Ap}{100}$ rublos y el depositario retiró B rublos. Por eso, a principios del segundo año el depósito componía una cantidad en rublos igual a

$$P_1=A\left(1+\frac{p}{100}\right)-B.$$

Al final del segundo año el depósito componía una cantidad igual a

$$P_2=P_1\left(1+\frac{p}{100}\right)-B=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-B\left[1+\left(\frac{p}{100}+1\right)\right] \text{ rublos,}$$

y al final del tercer año $P_3=Ak^3-B\,(1+k+k^2)$ rublos, donde

$$k=1+\frac{p}{100}.$$

Es evidente que al final del enésimo año la cantidad del depósito será igual a

$$P_n = Ak^n - B(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}),$$

es decir, a

$$P_n = \frac{Ap - 100B}{p}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100B}{p}.$$

Por la condición del problema es necesario hallar tal número n que $P_n \geqslant 3A$. Entonces

$$n \geqslant \frac{\log(3Ap - 100B) - \log(Ap - 100B)}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}. \tag{1}$$

El problema tiene sentido si aumenta la cantidad del depósito, es decir, si

$$Ap > 100B.$$

Puesto que, además, $p > 0$, $A > 0$, $B > 0$, entonces la expresión que figura en la parte derecha de la desigualdad (1) tiene sentido.

226. Al final del primer año en la parcela forestal había una cantidad de madera igual a

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = a_1,$$

al final del segundo año,

$$a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = a_2,$$

al final del tercer año,

$$a_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = a_3$$

y así sucesivamente. Por fin, al final del enésimo año la cantidad de madera era

$$a_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = a_n = aq.$$

Es necesario determinar x.

Haciendo, para simplificar la escritura, $1 + \frac{p}{100} = k$, de la última igualdad obtendremos que $x = ka_{n-1} - aq$. Expresemos a_{n-1} por su valor de la ecuación anterior. Obtendremos:

$$x = k(ka_{n-2} - x) - aq = k^2a_{n-2} - kx - aq.$$

Pero,

$$a_{n-2} = ka_{n-3} - x.$$

Por consiguiente,

$$x = k^3a_{n-3} - k^2x - kx - aq.$$

Continuando del mismo modo, expresaremos por fin a_2 mediante a_1 y obtendremos la siguiente ecuación respecto a x:

$$x = k^na - x(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k) - aq.$$

De aquí

$$x = a\frac{k^n - q}{k^n - 1}(k - 1) = a\frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - q}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}\frac{p}{100}.$$

227. Antes del transvase la concentración de alcohol q_i era:

$$\text{en el primer recipiente } q_1=1,$$
$$\text{en el segundo recipiente } q_2=\frac{1}{k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{en el enésimo recipiente } q_n=\frac{1}{k^{n-1}}.$$

Supongamos que después de todos los transvases las concentraciones se hicieron respectivamente iguales a: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Entonces, $p_1=1$ y, siendo $i>1$, p_i se determina por la ecuación

$$p_i=\frac{q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2}}{v}=\frac{q_i+p_{i-1}}{2} \qquad (i=2, \ldots, n).$$

Esta ecuación se obtiene dividiendo la cantidad de alcohol

$$q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2},$$

que resultó en el i-ésimo recipiente después de llenarlo con el contenido del $(i-1)$-ésimo recipiente, por el volumen total v del recipiente.

De este modo,

$$p_2=\frac{q_2+p_1}{2}, \qquad p_3=\frac{q_3+p_2}{2}, \quad \ldots, \quad p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}.$$

De aquí

$$p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}=\frac{q_n+\frac{q_{n-1}+p_{n-1}}{2}}{2}=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}p_{n-2}=$$
$$=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}\,\frac{q_{n-2}+p_{n-3}}{2}=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{q_{n-2}}{2^3}+\frac{p_{n-3}}{2^3}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\ldots+\frac{q_2}{2^{n-1}}+\frac{p_1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2k^{n-1}}+\frac{1}{2^2k^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}k}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Para $k\neq 2$, la última suma es igual a

$$p_n=\frac{1}{2k}\,\frac{\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2^{n-1}-k^{n-1}}{(2k)^{n-1}(2-k)}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Para $k=2$, es igual a

$$p_n=\frac{n-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{n-1}{2^n}+\frac{2}{2^n}=\frac{n-1}{2^n}.$$

228. La fracción tiene la forma $\frac{p}{p^2-1}$, donde p es un número entero mayor que cero. Las condiciones del problema se escriben en forma de desigualdades

$$\frac{p+2}{p^2+1}>\frac{1}{3}, \qquad 0<\frac{p-3}{p^2-4}<\frac{1}{10}.$$

Transformemos la primera desigualdad a la forma

$$3(p+2)>p^2+1 \quad \text{o bien} \quad 0>p^2-3p-5.$$

Resolviendo la correspondiente ecuación cuadrada, obtendremos:

$$p_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}.$$

De la desigualdad $0>p^2-3p-5$ obtenemos $p_2<p<p_1$. Pero $p_2<0$ y $p>0$, por eso

$$0<p<p_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2}.$$

Es fácil ver que p_1 se encuentra entre 4 y 4,5. Por consiguiente, de la segunda desigualdad se desprende que p, como número entero, puede tomar solamente uno de los cuatro valores siguientes: $p=1, 2, 3, 4$. Colocando estos valores en la segunda desigualdad

$$0<\frac{p-3}{p^2-4}<\frac{1}{10},$$

hallamos que $p\neq 1$, $p\neq 2$ y $p\neq 3$. Así pues, $p=4$, $\frac{p}{p^2-1}=\frac{4}{15}$.

7. Problemas diferentes

229. Tenemos:

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}.$$

230. Supongamos al principio que $x\neq a$. Multiplicando y dividiendo el producto a examinar por $x-a$ y empleando sucesivamente la fórmula para la diferencia de los cuadrados de dos números, obtendremos:

$$\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^8-a^8)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=\frac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}.$$

Supongamos ahora que $x=a$. Entonces, el producto que se examina será igual a

$$2a\cdot 2a^2\cdot 2a^4\ldots 2a^{2^{n-1}}=2^n a^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}=2^n a^{\frac{2^n-1}{2-1}}=2^n a^{2^n-1}.$$

231 Multipliquemos y dividamos la expresión dada por el producto

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}),$$

que para todos los valores reales de $x\neq -a$ difiere de cero. Se ve fácilmente que el resultado se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{(x^3+a^3)(x^6+a^6)(x^{12}+a^{12})\ldots(x^{3\cdot 2^{n-1}}+a^{3\cdot 2^{n-1}})}{(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}.$$

En el numerador y denominador de esta fracción figuran productos análogos al examinado en el problema anterior. Por eso, multiplicando el numerador y el denominador por el producto $(x-a)(x^3-a^3)$ reduciremos la expresión dada a la forma

$$\frac{x^{3\cdot 2^n}-a^{3\cdot 2^n}}{x^3-a^3}\,\frac{x-a}{x^{2^n}-a^{2^n}}=\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

Nuestro método pierde su vigor cuando $x=\pm a$. En estos casos, sin embargo, un simple cómputo demuestra que para $x=-a$ el producto es igual a $3^n a^{2(2^n-1)}$, y para $x=a$ él resulta igual a $a^{2(2^n-1)}$.

232. Es evidente que

$$S_k-S_{k-1}=b_k \qquad (k=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

y

$$S_1=b_1. \tag{2}$$

Colocando en la suma

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

en vez de $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ sus valores de (1) y (2) obtendremos:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+\ldots$$
$$\ldots+a_n(S_n-S_{n-1})=S_1(a_1-a_2)+S_2(a_2-a_3)+\ldots$$
$$\ldots+S_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nS_n.$$

233. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2, pasamos su parte derecha a la parte izquierda. Después de simples simplificaciones obtenemos:

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=$$
$$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Puesto que a, b y c son números reales, esto es posible cuando, y sólo cuando, $a=b=c$.

234. Multipliquemos $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ por $a+b+c$. Después de simples cómputos hallamos que el producto es igual a $a^3+b^3+c^3-3abc$, es decir, de acuerdo con la condición del problema, es igual a cero. De aquí se desprende la validez de la confirmación del problema.

235. Puesto que $p\neq 0$ y $q\neq 0$, se puede escribir:

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{p}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{b_n}{q}\right)^2=1,$$
$$\frac{a_1}{p}\frac{b_1}{q}+\frac{a_2}{p}\frac{b_2}{q}+\ldots+\frac{a_n}{p}\frac{b_n}{q}=1.$$

Sumando las dos primeras de estas igualdades y restando la tercera duplicada, hallamos:

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}\right)^2=0.$$

Tomando en consideración que todas las magnitudes son reales, deducimos que

$$\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}=0, \quad \frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}=0, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}=0,$$

de donde directamente se desprende la confirmación del problema.

236. Hagamos $p_n=a_n-a_{n-1}$. Entonces, de la condición del problema se desprende la fórmula $p_n=p_{n-1}+1$ que muestra que los números p_n forman una progresión aritmética con la diferencia de 1. Por eso $p_n=p_2+n-2$ Ahora hallamos:

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1=\\&=p_n+p_{n-1}+\ldots+p_2+a_1=(n-1)\,p_2+(n-2)+(n-3)+\ldots+1+a_1=\\&=(n-1)\,(a_2-a_1)+a_1+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\end{aligned}$$

o definitivamente

$$a_n=(n-1)\,a_2-(n-2)\,a_1+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}.$$

237. Primera resolución. La relación dada se puede escribir en dos formas

$$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta\,(a_{n-1}-\alpha a_{n-2}),$$
$$a_n-\beta a_{n-1}=\alpha\,(a_{n-1}-\beta a_{n-2}).$$

Suponiendo que $a_n-\alpha a_{n-1}=u_n$ y $a_n-\beta a_{n-1}=v_n$ hallaremos que

$$u_n=\beta u_{n-1}, \quad v_n=\alpha v_{n-1}.$$

De las últimas relaciones se desprende que

$$u_n=\beta^{n-2}u_2, \quad v_n=\alpha^{n-2}v_2,$$

o bien

$$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta^{n-2}\,(a_2-\alpha a_1),$$
$$a_n-\beta a_{n-1}=\alpha^{n-2}\,(a_2-\beta a_1).$$

Eliminando de aquí a_{n-1}, obtendremos definitivamente que

$$a_n=\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\cdot a_2-\alpha\beta\,\frac{\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}}{\beta-\alpha}\cdot a_1.$$

Segunda resolución. Suponiendo en la relación inicial que n es sucesivamente igual a 3, 4, ..., hallaremos:

$$a_3=(\alpha+\beta)\,a_2-\alpha\beta a_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\,a_1,$$

$$\begin{aligned}a_4=(\alpha+\beta)\,a_3-\alpha\beta a_2=(\alpha+\beta)\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_1-\alpha\beta\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\,a_2=\\=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_1.\end{aligned}$$

Ahora, es fácil demostrar por el método de inducción completa que la fórmula general es

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}\,a_1.$$

238. Tenemos que $x_1+x_2=3a$, $x_1x_2=a^2$. Por eso

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7a^2=\frac{7}{4},$$

de donde $a^2=\frac{1}{4}$. Por consiguiente, son posibles dos valores de a, a saber:

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=-\frac{1}{2}.$$

239. Hallamos:

$$y_1=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q,$$
$$y_2=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=-p^3+3pq.$$

Los coeficientes de la ecuación cuadrada $y^2+ry+s=0$ cuyas raíces son y_1 e y_2 son iguales a

$$r=-(y_1+y_2)=p^3-p^2-3pq+2q,$$
$$s=y_1y_2=(p^2-2q)(-p^3+3pq).$$

240 Tenemos que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Con ayuda de estas fórmulas hallamos:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

$$x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

241. Supongamos que para todos los valores de x

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2=(A+Bx)^2. \tag{1}$$

donde $B\neq 0$. Suponiendo que sea $x=-\frac{A}{B}$, obtenemos:

$$\left(a_1-b_1\frac{A}{B}\right)^2+\left(a_2-b_2\frac{A}{B}\right)^2+\left(a_3-b_3\frac{A}{B}\right)^2=0.$$

Puesto que todas las magnitudes son reales, de aquí se deducen tres igualdades:

$$a_1=\lambda b_1,\quad a_2=\lambda b_2,\quad a_3=\lambda b_3, \tag{2}$$

donde $\lambda=\frac{A}{B}$. Además, en este caso, debe cumplirse la siguiente condición:

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2\neq 0, \tag{3}$$

de lo contrario, los tres números serían ceros y el primer miembro de (1) no dependería de x.

Supongamos ahora que, al contrario, se han cumplido las condiciones (2) y (3); entonces

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2=b_1^2(\lambda+x)^2+b_2^2(\lambda+x)^2+b_3^2(\lambda+x)^2=$$
$$=\left(\lambda\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\,x\right)^2,$$

y, por consiguiente, la suma expuesta en el problema representa el cuadrado de un polinomio de primer grado. Así pues, las condiciones (2) y (3) son necesarias y suficientes.

242. Designemos las raíces de la ecuación por x_1 y x_2. Entonces $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

Si x_1 y x_2 son negativos, entonces, es evidente que $p>0$ y $q>0$. Si $x_1=\alpha+i\beta$, $\alpha<0$ y $\beta\neq 0$, entonces, $x_2=\alpha-i\beta$ y obtendremos que

$$p=-x_1-x_2=-2\alpha>0$$

y

$$q=x_1x_2=\alpha^2+\beta^2>0.$$

Supongamos que, al contrario, se conoce que $p>0$ y $q>0$ Entonces, en el caso en que x_1 y x_2 son reales, de la igualdad $x_1\cdot x_2=q$ se desprende que x_1 y x_2 son de un mismo signo y de la igualdad $x_1+x_2=-p$ se deriva que las raíces son negativas. Si $x_1=\alpha+i\beta$, $x_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$, entonces, $x_1+x_2=$ $=-p=2\alpha$, y por consiguiente, α es negativa.

243. Puesto que las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$ son positivas, el discriminante de la ecuación es

$$D=p^2-4q\geqslant 0, \tag{1}$$

y los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$p=-x_1-x_2<0, \tag{2}$$

$$q=x_1x_2>0. \tag{3}$$

Supongamos ahora que y_1 e y_2 son las raíces de la ecuación

$$qy^2+(p-2rq)\,y+1-pr=0. \tag{4}$$

El discriminante de esta ecuación es igual a

$$D_1=4r^2q^2+p^2-4q$$

y en virtud de (1) no es negativo cualquiera que sea el valor de r. Por consiguiente, y_1 e y_2 son reales para todos los valores de r. Teniendo en cuenta (2) y (3), por las fórmulas de Viete, para $r\geqslant 0$, obtenemos que

$$y_1y_2=\frac{1-pr}{q}>0 \tag{5}$$

y, por lo tanto, y_1 e y_2 son de un mismo signo. A continuación,

$$y_1+y_2=-\frac{p-2rq}{q}>0 \tag{6}$$

y, por consiguiente, para $r\geqslant 0$, y_1 e y_2 son positivos, con lo cual el problema queda demostrado.

Es evidente que la afirmación es justa si se exige que sea simultáneamente

$$1-pr>0 \quad \text{y} \quad p-2rq<0,$$

es decir que

$$r>\frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$r>\frac{p}{2q}. \tag{8}$$

Así pues, para los valores negativos de r que satisfacen las condiciones (7) y (8), y_1 e y_2 son positivos. Cuando no se cumplen estas condiciones, una o ambas raíces de la ecuación (4) no son positivas.

244. Supongamos al principio que $p\neq 3$. Para que las raíces de una ecuación cuadrada con coeficientes reales sean también reales es necesario y suficiente que el discriminante D de esta ecuación no sea negativo. Tenemos que

$$D=4p^2-24p\,(p-3)=4p\,(18-5p).$$

Por eso $D\geqslant 0$ cuando

$$0\leqslant p\leqslant 3{,}6. \tag{1}$$

Las raíces reales x_1 y x_2 serán positivas cuando, y sólo cuando, su suma y su producto sean positivas, es decir, cuando

$$x_1+x_2=\frac{2p}{p-3}>0, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{6p}{p-3}>0. \tag{2}$$

El sistema de desigualdades (1) y (2) se satisface en el caso en que

$$3 < p \leqslant 3{,}6$$

Observemos además que siendo $p=3$ la ecuación examinada en el problema tiene una sola raíz $x=3>0$. Por esta razón, todos los valores buscados quedan determinados por la condición

$$3 \leqslant p \leqslant 3{,}6.$$

245. Demostremos la afirmación por oposición. Supongamos que sea $a \neq 0$. Entonces, para las raíces x_1 y x_2 tenemos:

$$x_{1,\,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a\,(c+\lambda)}}{2a}.$$

Examinemos ahora dos casos:

1) Supongamos que sea $a>0$. Elijamos λ de tal modo que se cumpla la desigualdad

$$\lambda > \frac{b^2}{4a}-c.$$

En este caso, es evidente que $b^2-4a\,(c+\lambda)<0$ y, por consiguiente, la ecuación dada tiene raíces irreales.

2) Supongamos que $a<0$. Entonces, con la condición de que $\lambda>-c$, tenemos:

$$-b+\sqrt{b^2-4a\,(c+\lambda)}>0$$

y, por lo tanto, la raíz

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4a\,(c+\lambda)}}{2a}<0.$$

Así pues, ambas admisiones conducen a una contradición. La afirmación queda demostrada.

246. Las raíces $x_{1,\,2}$ de la ecuación $x^2+x+1=0$ satisfacen también a la ecuación $x^3-1=0$. Por eso, $x_{1,\,2}^{3m}=x_{1,\,2}^{3n}=x_{1,\,2}^{3p}=1$, de donde se deriva la afirmación.

247. Colocando el valor de y de la segunda ecuación en la primera, obtendremos la ecuación

$$2ax^2+2\,(a\lambda+1)\,x+a\lambda^2=0, \tag{1}$$

que, por la condición del problema, tiene raíces reales para todos los valores de λ. Demostremos que en este caso $a=0$. Supongamos lo contrario. Entonces, para el discriminante D de la ecuación cuadrada (1) es justa la desigualdad

$$D=4\,(a\lambda+1)^2-8a^2\lambda^2 \geqslant 0 \tag{2}$$

cualquiera que sea el valor de λ. La parte izquierda de la desigualdad (2) tiene la forma

$$-4a^2\lambda^2+8\lambda+1$$

y para valores lo suficientemente grandes en valor absoluto de λ es negativa. Por ejemplo, para $\lambda=\frac{10}{a}$ el miembro izquierdo de la ecuación (1) es igual a -321 Esto conduce a una contradición.

248. En la forma reducida, la ecuación dada tiene el aspecto

$$x^2-(p+q+2a^2)\,x+pq+(p+q)\,a^2=0.$$

Calculando el discriminante D de esta ecuación cuadrada obtenemos:

$$D=(p+q+2a^2)^2-4[pq+(p+q)a^2]=(p-q)^2+4a^4.$$

Puesto que $D \geqslant 0$ para todos los valores reales de a, p y q, la ecuación cuadrada, y al mismo tiempo la ecuación inicial, tiene raíces reales.

249. Examinemos el discriminante de la ecuación cuadrática dada

$$\begin{aligned} D&=(b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2= \\ &=(b^2+a^2-c^2-2ab)(b^2+a^2-c^2+2ab)= \\ &=[(a-b)^2-c^2][(a+b)^2-c^2]. \end{aligned}$$

Puesto que $a+b>c$ y $|a-b|<c$, entonces, $(a+b)^2>c^2$ y $(a-b)^2<c^2$. Por consiguiente, $D<0$.

250. Por las fórmulas de Viete (véase la pág. 12) tenemos.

$$x_1+x_2+x_3=2, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1, \quad x_1x_2x_3=-1.$$

Valiéndonos de estas igualdades, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3&=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1, \\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1&=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=-2, \\ y_1y_2y_3&=(x_1x_2x_3)^2=1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la nueva ecuación tiene la forma

$$y^3-y^2-2y-1=0.$$

251. Sobre la base de la fórmula de Viete tenemos:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1&=0, \\ x_1x_2x_3&=1. \end{aligned}$$

En virtud de estas igualdades

$$y_1+y_2+y_3=2(x_1+x_2+x_3)=2$$

Puesto que $y_1=1-x_1$, $y_2=1-x_2$ e $y_3=1-x_3$, entonces,

$$\begin{aligned} y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1&=(1-x_1)(1-x_2)+(1-x_2)(1-x_3)+ \\ &+(1-x_3)(1-x_1)=3-2(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1 \end{aligned}$$

y, por fin,

$$y_1y_2y_3=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=-1.$$

La nueva ecuación tiene la forma

$$y^3-2y^2+y+1=0.$$

252 Supongamos que sea

$$x_1=p-d, \quad x_2=p, \quad x_3=p+d.$$

Entonces, $x_1+x_2+x_3=3p$; por otra parte, por la fórmula de Viete $x_1+x_2+x_3=-a$. De aquí $3p=-a$ y, por consiguiente,

$$x_2=p=-\frac{a}{3}.$$

Colocando esta raíz en la ecuación, obtenemos:

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

de donde

$$c = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab$$

253. Supongamos que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ son las raíces de la ecuación dada. Ateniéndonos a la indicación, estudiemos la expresión

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2). \tag{1}$$

Para que con los segmentos de longitudes x_1, x_2 y x_3 se pueda construir un triángulo es necesario y suficiente que

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) > 0. \tag{2}$$

Este hecho fue demostrado en la resolución del problema 106.

Para obtener la condición planteada en el problema, expresemos la parte izquierda de la desigualdad (2) por medio de p, q y r. Con este fin, valgámonos de la dependencia entre las raíces y los coeficientes de una ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q,$$
$$x_1x_2x_3 = -r$$

Escribamos ahora la condición (2) en la forma siguiente:

$$(-p - 2x_3)(-p - 2x_1)(-p - 2x_2) > 0;$$

de aquí

$$-p^3 - 2p^2(x_1 + x_2 + x_3) - 4p(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 8x_1x_2x_3 > 0$$

y, por consiguiente,

$$p^3 - 4pq + 8r > 0.$$

254. Sea x_0 la raíz común de las ecuaciones. Colocando x_0 en ambas ecuaciones y substrayendo una ecuación de la otra, hallamos:

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} \neq 0.$$

Supongamos que $x^2 + ax + b$ es el cociente de la división del trinomio $x^3 + p_1x + q_1$ por $x - x_0$. Entonces,

$$x^3 + p_1x + q_1 = (x - x_0)(x^2 + ax + b).$$

Igualando en esta identidad los coeficientes de x^2 a los términos independientes, hallaremos: $a = x_0$ y $b = -q_1/x_0$. De aquí se deriva que las otras dos raíces de la primera ecuación se determinan por la fórmula

$$x_{2,3}^{(1)} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{4q_1}{x_0}}}{2},$$

y las de la segunda ecuación, por la fórmula

$$x_{2,3}^{(2)} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{4q_2}{x_0}}}{2}.$$

255. Es fácil comprobar que para $\lambda = 0$, las ecuaciones no tienen raíz común. Sea x_0 la raíz común de las ecuaciones para cierto valor de $\lambda \neq 0$. Entonces,

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_0^3 - x_0^2 - x_0 - (\lambda + 1) = 0, \\ \lambda x_0^2 - x_0 - (\lambda + 1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Multiplicando la segunda igualdad por x_0 y restándola de la primera, hallaremos.

$$x_0=\frac{\lambda+1}{\lambda}. \quad (2)$$

Así pues, si existe la raíz común, ella está enlazada con λ por la fórmula (2) Se puede comprobar fácilmente que la fracción $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ efectivamente satisface a ambas ecuaciones (por lo visto, es suficiente establecer este hecho solamente para la segunda ecuación). Así pues, las dos ecuaciones (1) tienen una raíz común para cualesquiera valores de $\lambda \neq 0$. Esta raíz se determina por la fórmula (2)

256. Primera resolución. Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces del polinomio $P(x)$. Por las fórmulas de Viete tenemos

$$x_1+x_2+x_3=0, \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p,$$

de donde se desprende fácilmente que

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2p=0.$$

Puesto que x_1, x_2 y x_3 son reales y difieren de cero ($q \neq 0$), entonces, x_1^2+ $+x_2^2+x_3^2>0$ y, por consiguiente, $p<0$.

Segunda resolución. Se ve fácilmente que entre las tres raíces del polinomio $P(x)$ habrá dos desiguales. En el caso contrario $P(x)$ representaría un cubo exacto: $P(x)\equiv(x-x_0)^3$, lo que, evidentemente no tiene lugar

Supongamos ahora que x_1 y x_2 son dos raíces desiguales del polinomio y sea $x_1<x_2$. Supongamos, al contrario, que $p\geqslant 0$; entonces, $x_1^3<x_2^3$ y $px_1\leqslant px_2$. De aquí se desprende:

$$P(x_1)=x_1^3+px_1+q<x_2^3+px_2+q=0,$$

puesto que $P(x_2)=0$. Llegamos a la conclusión de que $P(x_1)<0$. Esto contradice a que x_1 es la raíz de $P(x)$. Por consiguiente, $p<0$

257. Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación dada. En virtud de las fórmulas de Viete tenemos:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0, \quad (1)$$
$$x_1x_2x_3=b>0. \quad (2)$$

Supongamos al principio que las tres raíces son reales. Entonces, de la condición (2) se deriva, que, por lo menos, una de ellas es positiva. Si al mismo tiempo resultaran positivas dos raíces, entonces, en virtud de la misma fórmula (2) deduciríamos que la tercera raíz también es positiva, lo que contradice a la condición (1). De este modo para el caso en que las tres raíces sean positivas el problema queda resuelto.

Admitamos ahora que x_1 es una raíz irreal de la ecuación, entonces, como es sabido, la ecuación tiene una raíz compleja conjugada $x_2=\bar{x}_1$. Puesto que en este caso $x_1x_2=x_1\bar{x}_1>0$, de la igualdad (2) obtenemos,

$$x_3=\frac{b}{x_1\bar{x}_1}>0.$$

Con esto la afirmación queda completamente demostrada

258. Sean α, β, γ_1 las raíces de la primera ecuación y α, β, γ_2 las raíces de la segunda. En virtud de las fórmulas de Viete tenemos

$$\alpha+\beta+\gamma_1=-a, \quad (1)$$
$$\alpha\beta\gamma_1=-18, \quad (2)$$
$$\alpha+\beta+\gamma_2=0, \quad (3)$$
$$\alpha\beta\gamma_2=-12. \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) obtenemos:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = -a \tag{5}$$

y de las ecuaciones (2) y (4)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{3}{2} \tag{6}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (5) y (6), hallamos:

$$\gamma_1 = -3a, \quad \gamma_2 = -2a. \tag{7}$$

De este modo, si para ciertos valores de a y b las ecuaciones tienen raíces comunes, las terceras raíces de estas ecuaciones se determinan por las fórmulas (7). Colocando $\gamma_1 = -3a$ en la primera ecuación y $\gamma_2 = -2a$ en la segunda, obtenemos:

$$-18a^3 + 18 = 0$$

y

$$-8a^3 - 2ab + 12 = 0.$$

De aquí se determina el único par de valores reales

$$a = 1, \quad b = 2. \tag{8}$$

Colocando estos valores en la ecuación hallaremos fácilmente que

$$x^3 + x^2 + 18 = (x+3)(x^2 - 2x + 6)$$

y

$$x^3 + 2x + 12 = (x+2)(x^2 - 2x + 6).$$

Por consiguiente, para los valores indicados de a y b, las ecuaciones tienen efectivamente dos raíces comunes. Estas raíces se determinan por la fórmula

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-5}.$$

259. Designemos la parte izquierda de la igualdad por A. Tenemos:

$$A^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + $$
$$+ 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2} + 20 - 14\sqrt{2} =$$
$$= 40 + 3\sqrt[3]{400 - 2\cdot 14^2}A = 40 + 6A$$

Así pues, la parte izquierda de la igualdad a demostrar satisface a la ecuación cúbica

$$x^3 - 6x - 40 = 0. \tag{1}$$

Es fácil comprobar que para $x = 4$ la ecuación (1) se satisface. Dividiendo la parte izquierda de la igualdad (1) por $x - 4$ obtendremos la siguiente ecuación para la determinación de las otras dos raíces:

$$x^2 + 4x + 10 = 0.$$

Esta ecuación tiene raíces irreales, puesto que su discriminante $D = -24 < 0$. Por lo tanto, la ecuación (1) tiene la única raíz real $x = 4$ y puesto que A es notoriamente un número real, entonces $A = 4$, con lo cual el problema queda demostrado.

260. Es fácil ver que la expresión que se examina se reduce a cero si dos cualesquiera de los números a, b y c son iguales entre sí. De aquí, según el teorema de Bezu, se desprende que debe dividirse sin resto por cada una de las diferencias

$$(b-c), \quad (c-a), \quad (a-b).$$

Esto sugestiona que la expresion dada es el producto de los factores indicados. Efectivamente, tenemos:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a=$$
$$=a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=(c-b)[a^2-ac-ab+bc]=$$
$$=(c-b)[a(a-c)-b(a-c)]=(c-b)(b-a)(c-a). \qquad (1)$$

Puesto que a, b y c son por pares diferentes, la afirmación queda demostrada

261. Observemos que para $x=-y$ la expresión dada se reduce a cero. Por consiguiente, por el teorema de Bezu, se divide sin resto por $x+y$. Para efectuar la división representemos $x+y+z$ en forma de la suma de dos sumandos: $(x+y)$ y z. Elevando esta suma al cubo obtenemos.

$$[(x+y)+z]^3-x^3-y^3-z^3=$$
$$=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3=$$
$$=3(x+y)[z^2+z(x+y)+xy].$$

El trinomio cuadrado respecto a z, que figura a la derecha entre corchetes, puede ser fácilmente descompuesto en factores, puesto que es evidente que sus raíces son $-x$ y $-y$. Como resultado obtenemos:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(z+x)(z+y).$$

262. Multiplicando ambos miembros de la igualdad dada por $abc(a+b+c)$ la reduciremos a la forma

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)-abc=0.$$

Abriendo los paréntesis, obtenemos:

$$a^2b+2abc+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2=0$$

El primer miembro de esta igualdad se descompone fácilmente en factores

$$a^2(b+c)+ab(c+b)+ac(b+c)+bc(b+c)=$$
$$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(a+b)(a+c).$$

Puesto que el último producto es igual a cero, entonces, por lo menos uno de los factores es igual a cero, de donde se deduce la afirmación del problema.

263. Sean α y β las raíces del trinomio cuadrado x^2+px+q. Si el binomio x^4-1 se divide por el trinomio indicado sin resto, entonces, α y β son raíces del binomio. Se ve fácilmente que es justo también lo opuesto si α y β son raíces del binomio x^4-1, entonces, éste se divide por x^2+px+q sin resto*).

Las raíces del binomio x^4-1 son los números $1, -1, i, -i$. Por eso, tiene lugar la descomposición

$$(x^4-1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) \qquad (1)$$

En virtud de lo dicho más arriba los trinomios que nos interesan pueden ser solamente aquellos que representan un producto de los dos factores que figuran en la parte derecha de (1).
Componiendo todas las combinaciones posibles hallaremos $C_2(4)=6$ trinomios.

$$(x-1)(x+1)=x^2-1,$$
$$(x-1)(x-i)=x^2-(1+i)x+i,$$
$$(x-1)(x+i)=x^2-(1-i)x-i,$$
$$(x+1)(x-i)=x^2+(1-i)x-i,$$
$$(x+1)(x+i)=x^2+(1+i)x+i,$$
$$(x-i)(x+i)=x^2+1.$$

Con estos por lo visto se agotan todos los trinomios buscados.

---

*) En este caso, si $\alpha=\beta$, el número α debera ser raiz multiple también del dividendo.

264. Representando el polinomio dado en la forma

$$x^n-1-ax(x^{n-2}-1),$$

dividámoslo por la diferencia $x-1$ valiéndonos de la fórmula

$$\frac{x^{k+1}-1}{x-1}=1+x+\ldots+x^k. \qquad (1)\,^{*)}$$

Como resultado en el cociente obtendremos el polinomio

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1-ax(x^{n-3}+x^{n-4}+\ldots+x+1).$$

Para que este polinomio se divida por $x-1$ sin resto, en virtud del teorema de Bezu debe cumplirse la igualdad

$$n-a(n-2)=0.$$

Por eso la divisibilidad tiene lugar para cualquier número entero positivo $n>2$ y $a=\dfrac{n}{n-2}$.

265. De las condiciones del problema se desprende que

$$\left.\begin{aligned} p(a)&=A,\\ p(b)&=B,\\ p(c)&=C. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dividiendo el polinomio $p(x)$ entre $(x-a)(x-b)(x-c)$, representémoslo en la forma

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,q(x)+r(x). \qquad (2)$$

Es evidente que $r(x)$ es un polinomio no superior al segundo orden. Escribiéndolo en la forma

$$r(x)=lx^2+mx+n, \qquad (3)$$

coloquemos en la identidad (2) sucesivamente $x=a$, $x=b$, $x=c$. En virtud de la igualdad (1) obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones para la determinación de los coeficientes l, m y n del polinomio (3):

$$\left.\begin{aligned} la^2+ma+n&=A,\\ lb^2+mb+n&=B,\\ lc^2+mc+n&=C. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Resolviendo este sistema hallaremos:

$$l=\frac{(A-B)(b-c)-(B-C)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)},$$

$$m=\frac{(A-B)(b^2-c^2)-(B-C)(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$n=\frac{a^2(Bc-Cb)+a(Cb^2-Bc^2)+A(Bc^2-Cb^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Observación. Para $x=a$, $x=b$ y $x=c$, el polinomio buscado $r(x)$ toma respectivamente los valores A, B y C. Es fácil comprobar que tal polinomio,

---

*) La fórmula (1) se comprueba con facilidad directamente, es más, ella coincide con la fórmula de la suma de k términos de una progresión geométrica.

no superior al segundo orden, es el siguiente:

$$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \qquad (5)$$

Puesto que el sistema (4) tiene una sola solución, entonces, existe solamente un polinomio con la propiedad indicada y, por consiguiente, $r(x)$ coincide con el polinomio (5).

266. Por lo visto, la fórmula es justa para $n=1$. Supongamos que la fórmula es justa para cierto número n; demostremos que entonces ella será también justa para $n+1$. Designando por S_n la suma que figura en la parte izquierda de la fórmula a demostrar, tendremos:

$$S_{n+1}=S_n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]}{6}.$$

De aquí, de acuerdo con el método de inducción matemática, se deriva la validez de la fórmula para cualquier valor entero positivo de n.

267. Sea S_n la suma que figura en la parte izquierda de la fórmula. Para $n=1$, ambas partes de la fórmula coinciden. Demostremos que si la fórmula es justa para cierto número n, entonces será también justa para $n+1$. Tenemos:

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Por consiguiente, la fórmula es justa para cualquier n entero positivo.

268. Para $n=1$ es fácil convencerse de la justeza de la afirmación. Supongamos que la fórmula sea justa para cierto valor de $n\geqslant 1$. Designemos por S_n la suma que figura en la parte izquierda de la fórmula. Tenemos.

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

De aquí

$$S_{n+1}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+3]}{4[(n+1)+1][(n+1)+2]}.$$

Por consiguiente, la fórmula es justa para cualquier valor entero positivo de n.

269. Por lo visto, la fórmula es justa para $n=1$. Supongamos que ella sea justa para cierto valor de $n\geqslant 1$, es decir,

$$(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)^n=\cos n\varphi+i\operatorname{sen} n\varphi. \qquad (1)$$

Para convencerse de la justeza de la fórmula para $n+1$, multipliquemos ambas partes de (1) por $\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$. De acuerdo con la regla de multiplicación de números complejos, obtendremos:

$$(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)^{n+1}=(\cos n\varphi+i\operatorname{sen} n\varphi)(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)=$$
$$=(\cos n\varphi\cos\varphi-\operatorname{sen} n\varphi\operatorname{sen}\varphi)+i(\cos n\varphi\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen} n\varphi\cos\varphi)=$$
$$=\cos(n+1)\varphi+i\operatorname{sen}(n+1)\varphi.$$

Por consiguiente, la fórmula es justa para cualquier valor entero positivo de n

270. Es evidente que $a+b=1$ y $ab=-1$. Aprovechando este hecho se puede escribir que

$$a_n=a_n(a+b)=\frac{a^{n+1}-ab^n+a^nb-b^{n+1}}{\sqrt{5}}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

o bien

$$a_n=a_{n+1}-a_{n-1},$$

de donde

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}.$$

De aquí se deduce que si para cierto valor de n, los números a_{n-1} y a_n son enteros y positivos, entonces, también a_{n+1} y, por consiguiente $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ serán números enteros y positivos. Pero como $a_1=1$ y $a_2=1$, por lo tanto, para $n>2$ todos los valores de a_n serán enteros y positivos.

271. Para $n=1$ la desigualdad es justa. Supongamos que sea justa para cierto valor de n. Multiplicando ambas partes de esta desigualdad por $1+a_{n+1}>0$, hallaremos que

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)(1+a_{n+1})\geqslant(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+a_{n+1})=$$
$$=1+a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_1a_{n+1}+a_2a_{n+1}+\ldots+a_na_{n+1}.$$

Puesto que la suma $a_1a_{n+1}+a_2a_{n+1}+\ldots+a_na_{n+1}>0$, entonces, de aquí se deduce que la desigualdad también es justa para $n+1$.

272. Ante todo nos convencemos de que la fórmula es válida para $n=1$. En efecto, para $n=1$ la fórmula tiene la forma

$$(a+b)_1=\binom{1}{0}(a)_0(b)_1+\binom{1}{1}(a)_1(b)_0. \qquad (1)$$

Valiéndose ahora de la definición de potencia generalizada, se hace evidente que ambas partes de la fórmula (1) son iguales a $a+b$ y, por consiguiente, efectivamente tiene lugar la igualdad.

Supongamos ahora que la fórmula es válida para cierto valor de n y demostremos que será también válida para $n+1$. De la definición de potencia generalizada tenemos

$$(a+b)_{n+1}=(a+b)_n(a+b-n)=\left[\binom{n}{0}(a)_0(b)_n+\binom{n}{1}(a)_1(b)_{n-1}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k}+\ldots+\binom{n}{n}(a)_n(b)_0\right](a+b-n).$$

Abriendo aquí los corchetes, transformemos cada uno de los $n+1$ sumandos por la fórmula

$$\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k}(a+b-n)=\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k}[(a-k)+(b-n+k)]=$$
$$=\binom{n}{k}(a)_k(a-k)(b)_{n-k}+\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k}(b-n+k)=$$
$$=\binom{n}{k}(a)_{k+1}(b)_{n-k}+\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k+1} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Como resultado obtendremos:

$$(a+b)_{n+1}=\binom{n}{0}(a)_1(b)_n+\binom{n}{0}(a)_0(b)_{n+1}+\binom{n}{1}(a)_2(b)_{n-1}+$$
$$+\binom{n}{1}(a)_1(b)_n+\ldots+\binom{n}{k}(a)_{k+1}(b)_{n-k}+\binom{n}{k}(a)_k(b)_{n-k+1}+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n}(a)_{n+1}(b)_0+\binom{n}{n}(a)_n(b)_1.$$

Después de reducir los términos semejantes tendremos:

$$(a+b)_{n+1}=\binom{n}{0}(a)_0(b)_{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right](a)_1(b)_n+$$
$$+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right](a)_2(b)_{n-1}+\ldots+\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right](a)_{k+1}(b)_{n-k}+\ldots+$$
$$+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right](a)_n(b)_1+\binom{n}{n}(a)_{n+1}(b)_0.$$

Aprovechando, a continuación, el hecho de que

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1, \qquad \binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1,$$

y la identidad fácil de comprobar

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

obtenemos:

$$(a+b)_{n+1}=\binom{n+1}{0}(a)_0(b)_{n+1}+\binom{n+1}{1}(a)_1(b)_n+$$
$$+\binom{n+1}{2}(a)_2(b)_{n-1}+\ldots+\binom{n+1}{k+1}(a)_{k+1}(b)_{n-k}+\ldots+\binom{n+1}{n}(a)_n(b)_1+$$
$$+\binom{n+1}{n+1}(a)_{n+1}(b)_0.$$

Por consiguiente, hemos demostrado que si la fórmula, expuesta en la condición del problema, es válida para cierto valor de n, entonces es también válida para $n+1$. Pero ella es justa para $n=1$, por consiguiente, de acuerdo con el método de inducción matemática completa, es válida para todos los valores enteros positivos de n.

273. Sea $r(t)$ la distancia entre los trenes en el momento de tiempo t. Entonces

$$r^2(t)=(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+a^2+b^2$$

Observemos que si $r^2(t)$ tiene el valor mínimo para $t=t_0$, entonces, tambien $r(t)$ adquiere el valor mínimo cuando $t=t_0$. Es justo y viceversa. El problema se reduce a la determinación del valor mínimo del trinomio cuadrado $r^2(t)$.

De acuerdo con la fórmula (4) en la pág. 47 el valor mínimo de $r^2(t)$ y, por consiguiente, de $r(t)$, se obtiene en el momento de tiempo

$$t_0=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Valiéndonos a continuación de la fórmula (3), hallamos la distancia mínima entre los trenes:

$$r(t_0)=\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)(v_1^2+v_2^2)-4(av_1+bv_2)^2}{4(v_1^2+v_2^2)}}=\frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

274. En el momento de tiempo t el coche se encuentra a la distancia de $40\,t$ km del punto A y la motocicleta a la distancia de $\frac{32}{2}t^2+9$ km del mismo punto. Por consiguiente, la distancia entre ellos es igual al valor absoluto de la diferencia $16t^2+9-40t$. Designando esta diferencia por $y(t)$, tracemos el gráfico del trinomio cuadrado $y(t)$ (fig. 4). Este gráfico representa una parábola que, para los valores $t_1=\frac{1}{4}$ y $t_2=2\frac{1}{4}$, interseca el eje t. Del gráfico está claro que la ordenada de mayor valor absoluto y, para la condición $0\leqslant t\leqslant 2$, corresponde al vértice de la parábola. El vértice de la parábola se encuentra en el eje de simetría que cruza el eje t en el punto

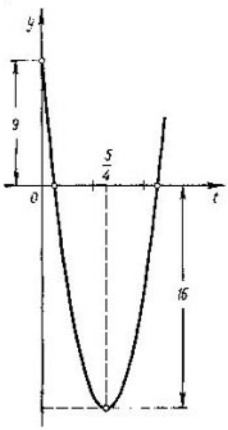

FIG. 4

$$t_0=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{5}{4}.$$

Así pues, la distancia máxima entre el tren y la motocicleta se alcanza al cabo de 1 hora 15 minutos después de iniciar el movimiento y es igual a 16 km

275. Designemos la expresión que se analiza por y y transformémosla de la siguiente manera:

$$y={}^2\log^4 x+12\,{}^2\log^2 x\,({}^2\log 8-{}^2\log x)=$$
$$={}^2\log^2 x\,({}^2\log^2 x-12\,{}^2\log x+36)={}^2\log^2 x\,(6-{}^2\log x)^2.$$

Hagamos a continuación ${}^2\log x=z$, de modo que $0\leqslant z\leqslant 6$. Entonces, el problema se reduce a la determinación del valor máximo de la variable

$$y=z^2(6-z)^2.$$

Es suficiente hallar el valor máximo de $z(6-z)$ con la condición de que $0\leqslant z\leqslant 6$, puesto que cuanto mayor es un número positivo tanto mayor es el cuadrado de este número. El trinomio cuadrado $z(6-z)=-(z-3)^2+9$ alcanza su valor máximo para $z=3$. Así pues, el valor máximo se consigue cuando $z=3$ y es igual a 81.

276. Primera resolución. Por lo visto es suficiente examinar solamente los valores positivos de x. De acuerdo con la conocida desigualdad (3), pág. 22 tenemos:

$$\frac{ax^2+b}{2}\leqslant\sqrt{ax^2b}=x\sqrt{ab} \tag{1}$$

Por consiguiente para todos los valores de $x>0$

$$y=\frac{x}{ax^2+b}\leqslant\frac{x}{2x\sqrt{ab}}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}. \tag{2}$$

Puesto que (1) pasa a ser una igualdad cuando $ax^2=b$, entonces, para $x_0=\sqrt{\frac{b}{a}}$ tenemos:

$$y_0=\frac{1}{2\sqrt{ab}}. \tag{3}$$

En virtud de (2) éste es precisamente el valor máximo de la función.

Segunda resolución. Resolviendo la relación

$$y=\frac{x}{ax^2+b} \tag{4}$$

respecto a x, obtendremos:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4aby^2}}{2ay}. \tag{5}$$

De la fórmula (5) se desprende que para todos los valores reales de x debe cumplirse la desigualdad $1-4aby^2\geqslant 0$. De aquí

$$y\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}}. \tag{6}$$

Puesto que para cierto valor real de x_0 la función (4) adquiere el valor $y_0=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ $\left(\text{de la fórmula (5) hallamos que } x_0=\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, entonces, en virtud de (6) este valor es el máximo.

277. Por medio de las transformaciones evidentes, obtenemos.

$$\frac{x^2+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}=-2+\left[x+1+\frac{2}{x+1}\right]$$

En virtud de la desigualdad (3), pág. 22

$$x+1+\frac{2}{x+1}\geqslant 2\sqrt{(x+1)\frac{2}{(x+1)}}=2\sqrt{2}, \tag{1}$$

con la particularidad de que el signo de igualdad en (1) tiene lugar solamente en el caso cuando

$$1+x=\frac{2}{x+1}, \quad \text{es decir, para } x_0=\sqrt{2}-1.$$

Así pues, para todos los valores de $x_0\geqslant 0$

$$\frac{x^2+1}{x+1}\geqslant -2+2\sqrt{2} \tag{2}$$

y el signo de igualdad en esta fórmula tiene lugar cuando

$$x=\sqrt{2}-1.$$

278. Tomemos el eje numérico y marquemos en él los puntos A, B, C y D correspondientes a los numeros a, b, c y d. El punto con la abscisa variable x lo designaremos por M (fig. 5). Examinemos los cinco casos siguientes.

FIG. 5

1) $x\leqslant a$; entonces

$$\varphi(x)=MA+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

De aquí está claro que $\varphi(x)$ adquirirá su valor mínimo en el caso en que el punto M coincida con el punto A y que este valor será igual a

$$3AB+2BC+CD.$$

2) $a<x\leqslant b$; en este caso

$$\varphi(x)=AM+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

La función $\varphi(x)$ adquiere su valor mínimo cuando el punto M coincide con el punto B; este valor es igual a

$$AB+2BC+CD$$

3) $b \leqslant x \leqslant c$; para estos valores de x la función $\varphi(x)$ es constante e igual a

$$AB+2BC+CD.$$

4) $c \leqslant x < d$; la función $\varphi(x)$ adquiere su valor mínimo para $x=c$; este valor es también igual a

$$AB+2BC+CD.$$

5) $x \geqslant d$; el valor mínimo de la función $\varphi(x)$ es igual a

$$AB+2BC+3CD.$$

Comparando los resultados obtenidos vemos que el valor mínimo de la función $\varphi(x)$ es igual a $AB+2BC+CD$, o bien

$$b-a+2(c-b)+d-c=d+c-b-a.$$

La función $\varphi(x)$ adquiere este valor en el caso cuando

$$b \leqslant x \leqslant c.$$

279. Sea r el módulo y φ el argumento del número complejo z ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Entonces, $z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ y la ecuación dada toma la forma

$$r^2(\cos 2\varphi+i\operatorname{sen}2\varphi)+r=0.$$

De aquí, o bien $r=0$ y $z=z_1=0$, o bien $r\cos 2\varphi+1+ir\operatorname{sen}2\varphi=0$ y, por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}2\varphi&=0,\\ r\cos 2\varphi+1&=0.\end{aligned}\right\}$$

A la primera ecuación la satisfacen los valores $\varphi=0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ y puesto que en virtud de la segunda ecuación $\cos 2\varphi<0$, quedan solamente los valores $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ y $\varphi=3\pi/2$. Además, de la segunda ecuación hallamos en ambos casos que $r=1$, así que obtenemos dos soluciones más.

$$z_2=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=i,\quad z_3=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)=-i.$$

280. Representemos a z en la forma $z=x+iy$. Entonces, la ecuación $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1$ toma la forma

$$(x-4)^2+y^2=(x-8)^2+y^2.$$

De aquí $x=6$ y, por lo tanto, $z=6+iy$. Colocamos este valor en la ecuación $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right|=\dfrac{5}{3}$. Entonces, después de las correspondientes simplificaciones la ecuación toma la forma

$$y^2-25y+136=0.$$

De aquí

$$y_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-4\cdot 136}}{2}=\frac{25\pm\sqrt{625-544}}{2}=\frac{25\pm 9}{2},$$

es decir, $y_1=17$; $y_2=8$.

Respuesta: $z_1=6+17i$; $z_2=6+8i$.

281. Para simplificar la escritura hagamos $\frac{1+i}{2}=z$. El producto que se examina

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})\dots(1+z^{2^n})$$

tiene la misma forma que el producto en el problema 230. Designemos este producto, para simplificar la escritura, por P.

Procediendo del mismo modo que en el problema 230, hallaremos:

$$P=\frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}.$$

Queda colocar en la fórmula dada en vez de z su valor. Tendremos.

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$$

y, a continuación,

$$1-z^{2^{n+1}}=1-\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{n+1}}=1-\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]^{2^n}=1-\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n}. \qquad (1)$$

Observemos que para $n\geqslant 2$ tenemos $i^{2^n}=(i^4)^{2^{n-2}}=1$. Por consiguiente, en virtud de (1), para $n\geqslant 2$, tendremos que

$$1-z^{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{2^n}} \quad \text{y} \quad P=(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Para $n=1$ tenemos:

$$1-z^{2^{n+1}}=1-\left(\frac{i}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

Respuesta:

$$P=(1+i)\frac{5}{4}.$$

282. Puesto que la substracción de números complejos geométricamente se efectúa por la regla del paralelogramo, el módulo de la diferencia de dos números complejos $|z'-z''|$ es igual a la distancia entre los correspondientes puntos del plano complejo. Por consiguiente, la condición $|z-25i|\leqslant 15$ la satisfacen los puntos del plano complejo que se encuentran dentro y en el margen del círculo con el centro en el punto $z_0=25i$ y de radio igual a 15 (fig. 6). Del dibujo se ve que al número de argumento mínimo le corresponde el punto z_1 en el que la recta trazada desde el punto O es tangente a la circunferencia. Del triángulo rectángulo Oz_1z_0 hallamos que $x_1=12$ e $y_1=16$. El número buscado será $z_1=12+16i$.

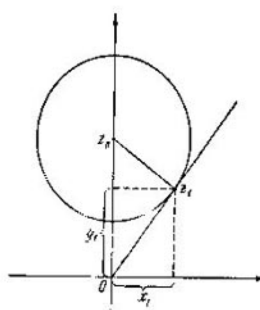

FIG. 6

283. Demostremos que para representar el número complejo $a+bi$ en la forma

$$a+bi=\frac{1-ix}{1+ix} \qquad (1)$$

es necesario y suficiente que

$$|a+bi|=1 \quad \text{y} \quad a+bi\neq -1.$$

Demostremos la necesidad. Supongamos que se satisface la condición (1). Entonces

$$|a+bi|=\frac{|1-ix|}{|1+ix|}=1,$$

puesto que $|1-ix|=|1+ix|=\sqrt{1+x^2}$. A continuación,

$$\frac{1-ix}{1+ix}\neq-1,$$

ya que de lo contrario tendríamos que $1-ix=-1-ix$, es decir, $2=0$.

Demostremos la suficiencia. Supongamos que sea $|a+bi|=1$ y $a+bi\neq-1$. Hagamos $\arg(a+bi)=\alpha$, donde $-\pi<\alpha<\pi$. Observemos que $\alpha\neq\pi$ en virtud de la condición $a+bi\neq-1$. Ahora tenemos:

$$a+bi=|a+bi|(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha. \tag{2}$$

Pero

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Colocando estas expresiones en la parte derecha de la fórmula (2), tendremos:

$$a+bi=\frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-ix}{1+ix},$$

donde $x=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

284. Sea $z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$; entonces

$$|z^2+1|=\sqrt{(r^2\cos 2\varphi+1)^2+(r^2\operatorname{sen}2\varphi)^2}=\sqrt{r^4+2r^2\cos 2\varphi+1};$$

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\frac{|z^2+1|}{r}=1;$$

$$r^4+r^2(2\cos 2\varphi-1)+1=0.$$

Hagamos $r^2=t$; $|z|$ adquire su valor máximo cuando adquiere su valor máximo t. Tenemos:

$$t=\frac{1-2\cos 2\varphi\pm\sqrt{(1-2\cos 2\varphi)^2-4}}{2}.$$

Puesto que nos interesa el valor máximo de t, delante de la raíz debe tomarse el signo mas. Es fácil ver que el valor máximo de t se consigue cuando $\cos 2\varphi=-1$, es decir, cuando $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Este valor es igual a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente, el valor máximo $|z|$ es igual a

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

285. El ángulo entre dos rayos vecinos es igual a $\frac{2\pi}{n}$. Designemos por d_1, d_2, ... las distancias desde A hasta las bases de las perpendiculares bajadas sucesivamente a los rayos que parten del punto A (fig. 7). Es evidente que tenemos:

$$d_k = d\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

La longitud de la k-ésima perpendicular es igual a

$$L_k = d_{k-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = d\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^{k-1}.$$

La longitud total de la quebrada de m eslabones será

$$d\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\left[1+\cos\frac{2\pi}{n}+\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2+\ldots+\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^{m-1}\right].$$

La longitud L de la quebrada enredada infinitamente se obtendrá al aumentar ilimitadamente m y se expresará con la suma de los términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente cuyo denominador es $q=\cos\frac{2\pi}{n}$ y el primer término $d\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$

$$L = d\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}} = d\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Al aumentar n la longitud L aumenta y al aumentar ilimitadamente n aumenta ilimitadamente L.

286. Primera resolución. Sea $1abcde$ el número buscado (aquí las letras a, b, c, d y e significan cifras de los órdenes respectivos). Evidentemente, $e=7$, ya que $1abcde \times 3 = abcde1$. Después de multiplicar 7 por 3 el dos pasa al siguiente orden, por eso, el producto $d\times 3$ deberá terminar con la cifra 5. Por consiguiente, $d=5$. Tenemos que $1abc\,57\cdot 3 = abc\,571$. Razonando análogamente hallamos que $c=8$, $b=2$ y, por fin, $a=4$. El número buscado es 142 857.

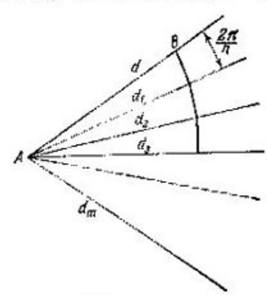

FIG. 7

Segunda resolución. Supongamos de nuevo que $1abcde$ es el número buscado. Hagamos $abcde = x$, entonces, el número buscado es igual a 10^5+x. Según la condición del problema tenemos que

$$(10^5+x)\,3 = 10x+1,$$

de donde $x = 42\,857$. Por consiguiente, el número buscado es 142 857.

287. Puesto que p es divisible entre 37, se puede escribir

$$p = 100a + 10b + c = 37k,$$

donde k es un número entero. Es evidente, luego, que

$$q = 100b + 10c + a = 10p - 999a = 370k - 37\cdot 27a.$$

Por consiguiente, q también es divisible entre 37.

Razonamientos análogos sirven también para el número r.

288. Tenemos:

$$A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9.$$

Por lo visto, es suficiente demostrar que

$$B = 3n^3 + 15n = 3n(n^2 + 5)$$

es divisible entre 9. Si $n = 3k$, donde k es un número entero, entonces, B es divisible entre 9. Para $n = 3k + 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 6$; para $n = 3k + 2$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 9$. En ambos casos $n^2 + 5$ es divisible entre 3. Por consiguiente, en todos los casos B es divisible entre 9.

289. Primera resolución. La suma S_n se puede representar en la siguiente forma

$$S_n = n^3 + 3(n^2 + 2n + 1) - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 3(n+1)^2.$$

El primer sumando es divisible entre 3, puesto que es el producto de tres números enteros sucesivos (uno de ellos es obligatoriamente múltiple de tres). Por consiguiente, también la suma S_n es divisible entre 3.

Segunda resolución. Realizamos la demostración por inducción. Para $n = 1$, $S_1 = 12$ es divisible entre 3. Supongamos que para cualquier valor de n la suma S_n es divisible entre 3. Tenemos:

$$S_{n+1} = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) + 3 = S_n + 3(n^2 + 3n + 3).$$

Por consiguiente, S_{n+1} también es divisible entre 3.

290. Las bolas se han colocado en la base de la pirámide en forma de un triángulo equilátero. Supongamos que el lado de este triángulo contiene n bolas. Entonces, en la base de la pirámide habrán $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ bolas. La segunda capa de la pirámide tiene

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

bolas. La tercera tiene

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

bolas y así sucesivamente. La última, la capa superior, se compone de una sola bola. En total en la pirámide hay 120 bolas. Por consiguiente,

$$120 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \ldots + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

La parte derecha de la igualdad es igual a

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(véase el problema 266, pág. 201), por consiguiente, para la determinación de n obtenemos la ecuación

$$n(n+1)(n+2) = 720. \qquad (1)$$

Esta ecuación tiene una solución evidente $n = 8$. Para hallar las demás soluciones de esta ecuación pasamos 720 a la parte izquierda y dividimos el polinomio obtenido por $n - 8$. El cociente de la división será igual a $n^2 + 11n + 90$. Puesto que las raíces de este último polinomio son irreales, la ecuación (1) no tiene mas soluciones enteras que $n = 8$. Así pues, en la base de la figura piramidal hay

$$\frac{n(n+1)}{2} = 36$$

bolas.

291. Puesto que la cantidad de cajones llenos es igual a m, la cantidad de cajones metidos será igual a mk. De aquí se deduce que la cantidad de todos los cajones (junto con el primero) es igual a $mk + 1$. Por consiguiente, la cantidad de cajones vacíos es

$$mk + 1 - m = m(k-1) + 1.$$

GEOMETRIA

A. PLANIMETRIA

1. Problemas de cálculo

292. Tracemos la bisectriz del ángulo A (véase la fig. 8). Esta bisectriz intersecará el lado BC en el punto D y lo dividirá en partes proporcionales a b y c. Observemos a continuación que el $\triangle ACD$ es semejante al $\triangle ABC$ puesto que tienen el ángulo C común y el ángulo CAD es igual al B. De aquí

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC} \quad \text{o} \quad \frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{a}{b}.$$

Por consiguiente,

$$a=\sqrt{b^2+bc}$$

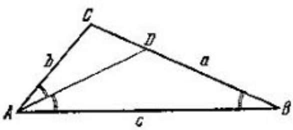

FIG. 8

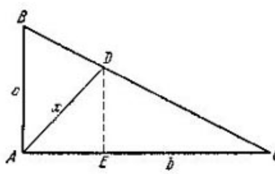

FIG. 9

293. Sea AD la bisectriz del ángulo recto A en el $\triangle ABC$ y $DE \perp AC$ (fig. 9). Puesto que

$$\angle DAE=\frac{\pi}{4}, \text{ entonces, } AE=DE=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

donde $x=AD$ es la longitud buscada. Es evidente que

$$\frac{ED}{AB}=\frac{CE}{CA} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{b-\frac{x}{\sqrt{2}}}{b}$$

De aquí

$$x=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

294. En el triángulo ABC (fig. 10) O es el punto de intersección de las medianas AD y BE; $AC=b$, $BC=a$. Hallemos $AB=c$.

Supongamos que $OD=x$ y $OE=y$. Valiéndonos de la propiedad de las medianas, de los triángulos AOB, BOD y AOE hallaremos:

$$4x^2+y^2=\frac{b^2}{4}, \quad 4x^2+4y^2=c^2, \quad 4x^2+16y^2=a^2.$$

Eliminando x e y, obtendremos:

$$c^2 = \frac{a^2+b^2}{5}.$$

Las condiciones de existencia del triángulo con los lados a, b y c, adquieren la forma

$$5(a+b)^2 > a^2+b^2, \qquad 5(a-b)^2 < a^2+b^2.$$

La primera desigualdad, evidentemente, se cumple cualesquiera que sean a y b, mientras que la segunda se transforma en la siguiente:

$$a^2 - \frac{5}{2}ab + b^2 < 0.$$

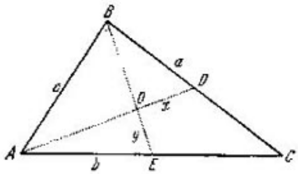

FIG. 10

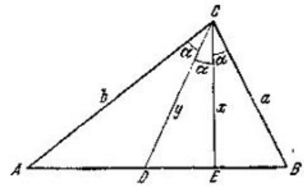

FIG. 11

Resolviendo esta desigualdad respecto a $\frac{a}{b}$, definitivamente obtendremos:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2.$$

295. Admitamos que $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \alpha$ y $CE = x$, $CD = y$ (fig. 11). Para el área del triángulo ABC se pueden escribir las tres expresiones siguientes:

$$S_{ACD} + S_{DCB} = \frac{1}{2}by \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}ay \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$S_{ACE} + S_{ECB} = \frac{1}{2}bx \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{1}{2}ax \operatorname{sen}\alpha,$$

$$S_{ACD} + S_{DCE} + S_{ECB} = \frac{1}{2}by \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}xy \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}ax \operatorname{sen}\alpha.$$

Igualando las partes izquierdas de estas igualdades y teniendo en cuenta la condición del problema obtendremos un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2a\cos\alpha &= x + a\frac{x}{y}, \\ 2b\cos\alpha &= y + b\frac{y}{x}, \\ \frac{x}{y} &= \frac{m}{n}. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos:

$$x = \frac{(n^2-m^2)\,ab}{n\,(bm-an)}, \qquad y = \frac{(n^2-m^2)\,ab}{m\,(bm-an)}.$$

296. Designemos por S el área del triángulo dado ABC (fig. 12) y hagamos $\frac{AD}{AB}=x$. Entonces el área del $\triangle ADE$ será igual a x^2S y el área del $\triangle ABE$, igual a xS. La condición del problema conduce a la ecuación

$$xS-x^2S=k^2,$$

resolviendo la cual obtendremos:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{4k^2}{S}}}{2}.$$

El problema es soluble si $S\geqslant 4k^2$ y tiene una o dos soluciones en dependencia de que sea $S>4k^2$ o $S=4k^2$ respectivamente.

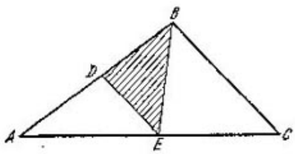

FIG. 12

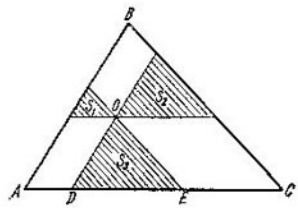

FIG. 13

297. Designemos por S el área del triángulo dado ABC. Los triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3, obtenidos según la construcción indicada en la condición del problema, son semejantes al $\triangle ABC$ (fig. 13). Por eso, sus áreas son entre sí como los cuadrados de sus lados semejantes, de donde

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{AD}{AC},\quad \sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{EC}{AC},\quad \sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{DE}{AC}$$

Sumando estas igualdades miembro a miembro, hallaremos

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

298. El tercer lado del triangulo, igual a la altura bajada a este lado, lo designamos por x. Haciendo uso de dos expresiones para el área del triángulo dado, obtendremos la ecuación

$$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{\frac{b+c+x}{2}\cdot\frac{c+x-b}{2}\cdot\frac{x+b-c}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}}$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos:

$$x^2=\frac{1}{5}\left(b^2+c^2\pm 2\sqrt{3b^2c^2-b^4-c^4}\right). \tag{1}$$

La condición indispensable para la solubilidad del problema es la condición

$$3b^2c^2\geqslant b^4+c^4. \tag{2}$$

Si se cumple esta condición, ambos valores de x^2 en (1) son positivos. Es fácil comprobar que si se cumple (2) también se cumplirán las desigualdades

$$b+c>x\geqslant|b-c|,$$

además, el signo de igualdad tendrá lugar solamente en el caso en que sea $x=0$. Esto último tiene lugar cuando, siendo $b=c$, en la igualdad (1) se toma delante de la raíz cuadrada el signo menos. Por consiguiente, en el caso cuando $b=c$ el problema tiene una sola solución

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}\,b.$$

Si $b\neq c$, el triángulo existe solamente en el caso en que se cumpla la desigualdad (2). Resolviendo esta desigualdad respecto a $\frac{b}{c}$, hallaremos que es equivalente a las siguientes desigualdades:

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}}\leqslant\frac{b}{c}\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Por consiguiente para $b\neq c$ existen dos triángulos, si ambas desigualdades (3) se cumplen con el signo $<$, y uno, cuando por lo menos una de las desigualdades se cumple con el signo $=$.

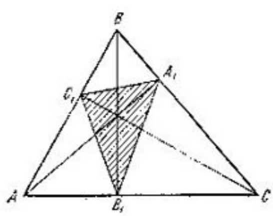

FIG. 14

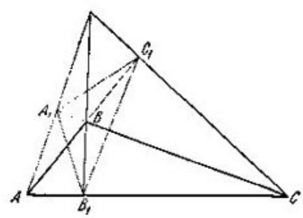

FIG. 15

299. Supongamos al principio que el $\triangle ABC$ es acutángulo (fig. 14). Entonces

$$S_{ABC}-S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}. \tag{1}$$

Tenemos:

$$S_{B_1AC_1}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\operatorname{sen}A=\frac{1}{2}AB\cos A\cdot AC\cos A\operatorname{sen}A=$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\operatorname{sen}A\cos^2 A=S_{ABC}\cos^2 A$$

y análogamente

$$S_{C_1BA_1}=S_{ABC}\cos^2 B,\qquad S_{A_1CB_1}=S_{ABC}\cos^2 C.$$

Colocando estas expresiones en (1), después de las transformaciones evidentes, obtendremos:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C. \tag{2}$$

Si el $\triangle ABC$ es obtusángulo (fig. 15), en vez de (1) tendremos:

$$S_{ABC}+S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}$$

y, correspondientemente, en vez de (2)

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1. \tag{3}$$

Por fin, si el $\triangle ABC$ es rectángulo, $S_{A_1B_1C_1}=0$, lo que, como es fácil comprobar, resulta también de las fórmulas (2) y (3).

300. 1) Sean BO y CO las bisectrices de los ángulos internos del $\triangle ABC$ (fig. 16). Es fácil ver que los triángulos BOM y CON son isósceles. Por consiguiente, $MN=BM+CN$.

2) La dependencia $MN=BM+CN$ es válida también para el caso de bisectrices exteriores.

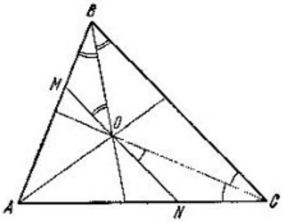

FIG. 16

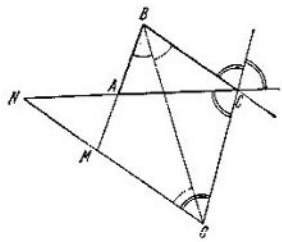

FIG. 17

3) Si una de las bisectrices es interior y la otra exterior (fig. 17), entonces, de los triángulos interiores BMO y CNO hallamos que $MN=CN-BM$, cuando $CN>BM$, y que $MN=BM-CN$, siendo $CN<BM$. Así pues, en este caso

$$MN=|CN-BM|.$$

Los puntos M y N coinciden solamente en el caso (3), si el $\triangle ABC$ es isósceles ($AB=AC$).

301. Tracemos a través del punto P tres rectas paralelas a los lados del triángulo (fig. 18). Los tres triángulos formados (rayados en el dibujo) también son

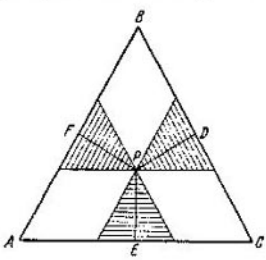

FIG. 18

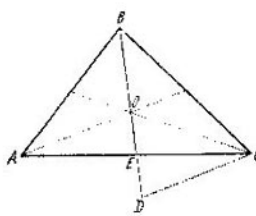

FIG. 19

regulares y la suma de sus lados es igual al lado $AB=a$ del triángulo ABC. Por consiguiente, la suma de sus alturas es igual a la altura del $\triangle ABC$, por lo tanto,

$$PD+PE+PF=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

La suma $BD+CE+AF$ es igual a la suma de los lados de los triángulos rayados más la suma de las mitades de estos lados, o sea,

$$BD+CE+AF=\frac{3}{2}a.$$

Por consiguiente,

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

302. Sea O el punto de intersección de las medianas en el $\triangle ABC$ (fig. 19). En la prolongación de la mediana BE trazamos $ED=OE$. Según la propiedad de las medianas los lados del $\triangle CDO$ son iguales a $\frac{2}{3}$ de los lados del triángulo compuesto por las medianas. Designando el área de este último por S_1, tendremos:

$$S_1=\frac{9}{4}S_{CDO}.$$

Por otro lado, el $\triangle CDO$ está formado por dos, y el $\triangle ABC$ por seis triangulos equidimensionales al $\triangle CEO$. Por eso,

$$S_{CDO}=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{S_1}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}.$$

303. Supongamos que sea ABC el triangulo dado (fig. 20). El área del $\triangle COB$ es igual a $\frac{1}{2}ar$, y el área del $\triangle COA$ es igual a $\frac{1}{2}br$. Sumando estas

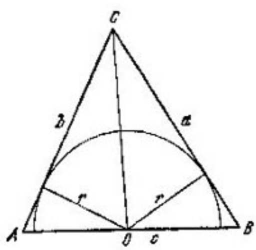

FIG. 20

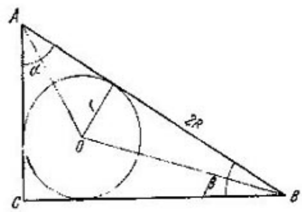

FIG. 21

magnitudes y expresando el área del $\triangle ABC$ por la fórmula de Heron, obtendremos:

$$r=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

304. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Entonces (fig. 21) $AB=2R$ y

$$AB=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

De aquí

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\frac{2R}{r}=5.$$

Además,

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=1,$$

es decir,

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}=1,$$

de donde

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=6.$$

Por consiguiente, $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$ son iguales a las raíces de la ecuación cuadrada $x^2-5x+6=0$.

Definitivamente obtenemos:

$$\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \qquad \beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

305. Designemos por a y b los lados del rectángulo dado y por φ el ángulo entre los lados de los rectángulos dado y circunscrito (fig. 22). Entonces, los lados del rectángulo circunscrito serán iguales a

$$a\cos\varphi+b\operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad a\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi.$$

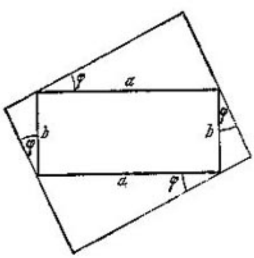

FIG. 22

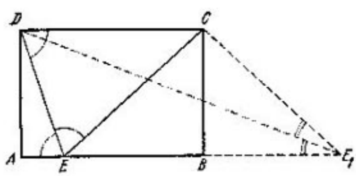

FIG 23

Según la condición del problema

$$(a\cos\varphi+b\operatorname{sen}\varphi)(a\operatorname{sen}\varphi+b\cos\varphi)=m^2,$$

de donde hallamos que

$$\operatorname{sen}2\varphi=\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}.$$

La condición de solubilidad del problema será $0\leqslant\operatorname{sen}2\varphi\leqslant1$, lo que es equivalente a las siguientes desigualdades:

$$\sqrt{ab}\leqslant m\leqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

306. Si el $\angle AED=\angle DEC$ (fig. 23), también el $\angle CDE=\angle DEC$, de donde $CE=CD$. Por consiguiente, E es el punto de intersección del lado AB con la circunferencia circunscrita desde el centro C con el radio CD. El problema es soluble si $AB\geqslant BC$, además, tiene dos soluciones cuando $AB>BC$ y una sola solución cuando $AB=BC$. (El punto E_1 en la fig. 23 corresponde a la segunda solución).

307. El lado lateral se ve desde el vértice de la base inferior bajo el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ (fig. 24) y la línea media es igual al segmento desde este vértice hasta el pie de la altura bajada desde el vértice opuesto, es decir, $h \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Por consiguiente, el área del trapecio es igual a

$$S = h^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

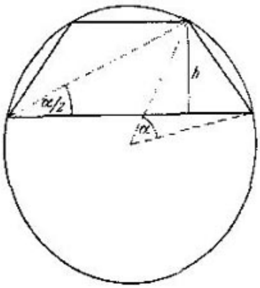

FIG. 24

308. Los puntos medios de las diagonales E y F del trapecio se encuentran sobre su línea media MN (fig. 25). Pero, $ME = FN = \frac{\alpha}{2}$. Por consiguiente,

$$EF = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

309. El paralelogramo está compuesto por 8 triángulos equidimensionales al triángulo AOE. La figura (el octaedro) obtenida por medio de la construcción indicada también está compuesta por 8 triángulos equidimensionales al $\triangle POQ$ (fig. 26). Puesto que $OP = \frac{1}{3} OA$ (por la propiedad de las medianas en el $\triangle DAE$) y $OQ = \frac{1}{2} OE$, entonces

$$S_{POQ} = \frac{1}{6} S_{AOE}.$$

Por consiguiente, la relación buscada es igual a $\frac{1}{6}$.

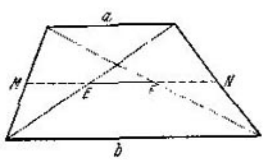

FIG. 25

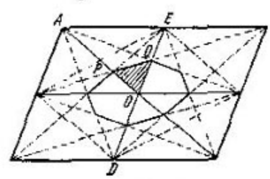

FIG. 26

310. Es evidente que $KLMN$ es un paralelogramo (fig. 27), además $KL = \frac{2}{5} AQ$. Por consiguiente,

$$S_{KLMN} = \frac{2}{5} S_{AQCS} = \frac{2}{5} \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{5} a^2.$$

311. A las dos cuerdas dadas de longitudes $2a$ y $2b$ les corresponden los ángulos centrales 2α y 2β, donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{R}, \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{R}.$$

El arco igual a $2(\alpha \pm \beta)$ está formado por la cuerda $2c$, donde

$$c = R \,|\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)| = \left| \frac{a}{R} \sqrt{R^2 - b^2} \pm \frac{b}{R} \sqrt{R^2 - a^2} \right|.$$

312. El área buscada es igual a la suma de las áreas de dos sectores cuyos ángulos son 2α y 2β (fig. 28) menos el doble del área del triángulo con los lados R, r y d:

$$S = R^2\alpha + r^2\beta - Rd \operatorname{sen} \alpha$$

Para hallar los ángulos α y β tenemos dos ecuaciones:

$$R \operatorname{sen} \alpha = r \operatorname{sen} \beta,$$
$$R \cos \alpha + r \cos \beta = d,$$

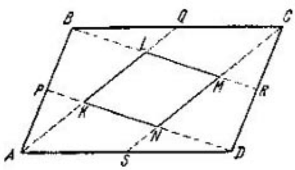

FIG. 27

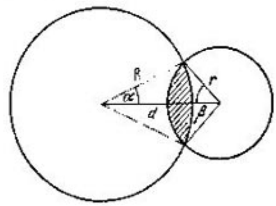

FIG. 28

resolviendo las cuales, hallamos

$$\cos \alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd},$$
$$\cos \beta = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd}.$$

Por consiguiente,

$$S = R^2 \operatorname{arccos} \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2 \operatorname{arccos} \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} - Rd \sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2}.$$

313. Sea K el punto de contacto de las dos circunferencias de radios r y r_1 y P el pie de la perpendicular bajada desde el centro O_2 de la tercera circunferencia a OO_1 (fig. 29). Haciendo $KP = x$, tendremos:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (1)$$

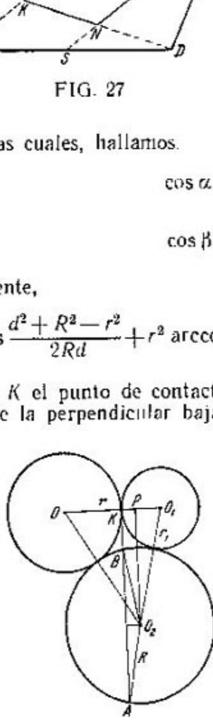

FIG. 29

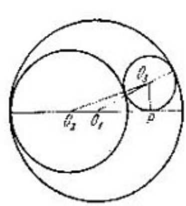

FIG. 30

El valor de x se determina de la ecuación

$$(R + r)^2 - (r + x)^2 = (R + r_1)^2 - (r_1 - x)^2$$

y es igual a

$$x = \frac{r - r_1}{r + r_1} R.$$

Colocando este valor de x en (1), obtendremos:

$$AB=\frac{4\sqrt{rr_1}}{r+r_1}R.$$

314. Sean O_1 y O_2 respectivamente los centros de las circunferencias de radios R y r y O_3 el centro de la tercera circunferencia. Supongamos que sea x el radio de la tercera circunferencia y P el punto de tangencia de ésta con el diámetro O_1O_2 (fig. 30). Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos O_2O_3P y O_1O_3P, obtendremos la igualdad

$$O_2O_3^2=O_3P^2+(O_2O_1+\sqrt{O_1O_3^2-O_3P^2})^2.$$

Colocando aquí los valores $O_2O_3=r+x$, $O_3P=x$, $O_2O_1=R-r$, $O_1O_3=R-x$, obtendremos una ecuación respecto a la incógnita x:

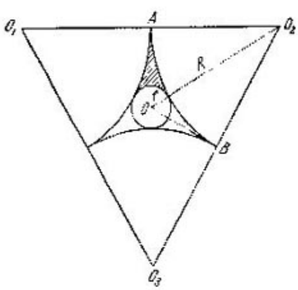

FIG 31

$$(r+x)^2=x^2+(R-r+\sqrt{(R-x)^2-x^2})^2.$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos que

$$x=4Rr\frac{R-r}{(R+r)^2}$$

315. Sean O_1, O_2 y O_3 los centros de las tres circunferencias iguales y O el centro del círculo de radio r (fig. 31). Designemos por $S_{O_1O_2O_3}$ el área del $\triangle O_1O_2O_3$, por S_{AO_2B} el área del sector AO_2B; entonces, el área buscada será

$$S=\frac{1}{3}(S_{O_1O_2O_3}-3S_{AO_2B}-\pi r^2). \tag{1}$$

Si R es el radio común de las tres circunferencias, entonces

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2}(R+r),$$

de donde

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}r=(3+2\sqrt{3})r.$$

A continuación, hallamos:

$$S_{O_1O_2O_3}=\frac{1}{2}2RR\sqrt{3}=\sqrt{3}R^2=3(12+7\sqrt{3})r^2,$$

$$S_{AO_2B}=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{\pi}{2}(7+4\sqrt{3})r^2$$

y por la fórmula (1) obtenemos definitivamente:

$$S=\left[12+7\sqrt{3}-\left(\frac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)\pi\right]r^2.$$

316. Sea $O_3D\perp O_1O_2$ (véase la fig. 32). Tenemos que

$$OO_3^2=O_1O_3^2+O_1O^2-2O_1O\cdot O_1D=O_2O_3^2+OO_2^2-2OO_2\cdot DO_2, \tag{1}$$

donde $O_1O_3=a+r$, $O_2O_3=b+r$, $O_1O=(a+b)-a=b$,

$$OO_2=(a+b)-b=a.$$

Haciendo $O_1D=x$, escribamos la segunda igualdad de (1) en la forma

$$(a+r)^2+b^2-2bx=(b+r)^2+a^2-2a(a+b-x),$$

de donde hallaremos que

$$x=a+\frac{a-b}{a+b}r.$$

Ahora, la primera igualdad de (1) tomará la forma de una ecuación con una incógnita r

$$(a+b-r)^2=(a+r)^2+b^2-2b\left(a+\frac{a-b}{a+b}r\right).$$

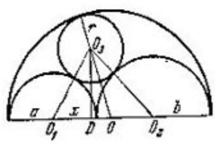

FIG. 32

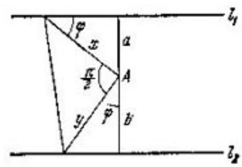

FIG. 33

Resolviendo esta ecuación, obtendremos definitivamente que

$$r=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

317. Designemos por a y b las distancias desde el punto dado A hasta las rectas dadas l_1 y l_2, y por x e y las longitudes de los catetos del triángulo buscado (fig. 33). Observando que $\frac{a}{x}=\operatorname{sen}\varphi$, $\frac{b}{y}=\cos\varphi$, tendremos dos ecuaciones:

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1, \quad \frac{1}{2}xy=k^2.$$

Transformando estas ecuacioes, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} xy&=2k^2,\\ b^2x^2+a^2y^2&=4k^4.\end{aligned}\right\}$$

Resolviéndolo, obtendremos que

$$x=\frac{k}{b}\left|\sqrt{k^2+ab}\pm\sqrt{k^2-ab}\right|,$$

$$y=\frac{k}{a}\left|\sqrt{k^2+ab}\mp\sqrt{k^2-ab}\right|.$$

El problema es soluble si $k^2\geqslant ab$ y tiene dos soluciones siendo $k^2>ab$ y una sola solución cuando $k^2=ab$.

318. Uniendo los centros de las circunferencias obtendremos un polígono semejante al dado. El centro del polígono obtenido coincide con el centro del polígono dado y sus lados son respectivamente paralelos a los lados del mismo (fig. 34).

Supongamos que sea r el radio común de las circunferencias que se examinan. Entonces, el lado del polígono construido por nosotros será igual a $2r$ y su área será

$$\sigma = nr^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Admitamos, a continuación, que $\beta = \frac{\pi(n-2)}{n}$ sea el ángulo interior del polígono. Para el area buscada S de la "estrella" obtenemos la expresión

$$S = \sigma - n\frac{r^2}{2}\beta = nr^2 \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} - n\frac{r^2}{2}\beta.$$

Luego, es fácil ver (véase la fig. 34) que

$$\frac{a}{2} - r = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

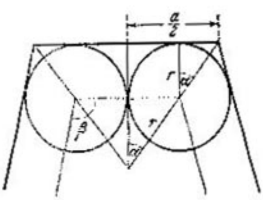

FIG. 34

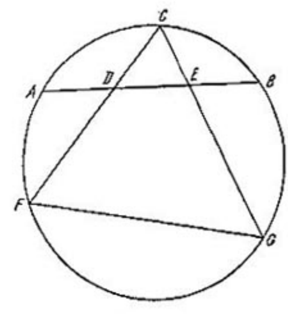

FIG. 35

de donde

$$r = \frac{a}{2\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)}$$

y, por consiguiente,

$$S = \frac{a^2}{4}\,\frac{n \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} - (n-2)\frac{\pi}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

319. En las denotaciones de la fig. 35 tenemos que

$$\angle CGF = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{AC}), \qquad \angle CDB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FA} + \overset{\frown}{BC}).$$

El cuadrilátero $DEGF$ será inscrito si, y sólo si, $\angle CGF = \angle CDB$, es decir, si $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

320. Sea O el vértice del ángulo agudo α y O_k el centro de la k-ésima circunferencia (fig. 36). Entonces,

$$r_k = OO_k \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \qquad r_{k+1} = (OO_k - r_k - r_{k+1})\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

y

$$r_{k+1} = r_k - r_k \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - r_{k+1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{r_{k+1}}{r_k}=\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

es decir, los radios de las circunferencias forman una progresión aritmética cuyo denominador es

$$\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}.$$

321. Supongamos que el ángulo mínimo entre los rayos reflejados y el plano P sea igual a α (fig. 37). Semejante ángulo lo forma el rayo que pasa por el borde del espejo C después de ser una vez reflejado en el punto B. Según la condición del problema $CF \parallel DA$; por consiguiente, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$. De

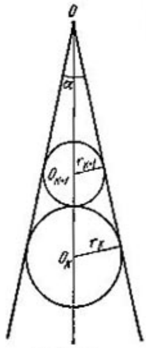

FIG. 36

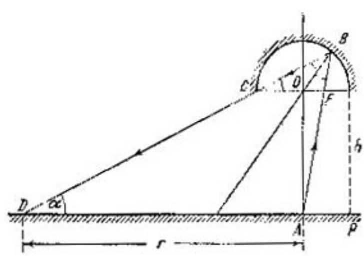

FIG. 37

la condición de reflexión en el punto B se desprende que $\angle OBF=\alpha$. Por esta razón, en el triángulo OBF tenemos:

$$\angle BOF=2\alpha, \qquad \angle OFB=180^\circ-2\alpha-\alpha=180^\circ-3\alpha.$$

Designemos la distancia desde el espejo hasta el plano por h, y el radio del círculo iluminado AD por r. Puesto que el radio del espejo es igual a 1, entonces

$$\frac{h}{r-1}=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Del triángulo OBF, según el teorema de los senos, hallamos

$$OF=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}.$$

En virtud de la semejanza de los triángulos CBF y DBA, sus alturas son proporcionales a sus lados, así que

$$\frac{AD}{FC}=\frac{h+\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha},$$

o bien

$$\frac{r}{1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}}=\frac{h+\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}. \qquad (2)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (1) y (2), hallamos:

$$r=\frac{2\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}.$$

Colocando aquí la magnitud dada en el problema $\alpha=15°$, obtendremos:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Luego,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

por lo tanto, de (1) obtendremos:

$$h=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

322. Es necesario examinar diferentes casos en dependencia del valor de la relación $\frac{r}{a}$.

1) $\frac{r}{a}\geqslant\sqrt{2}$. Las circunferencias no cortan al cuadrado, $S=a^2$.

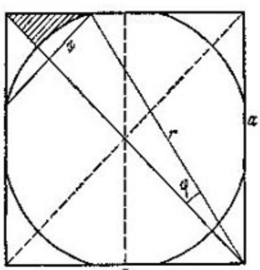

FIG. 38

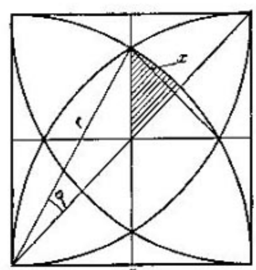

FIG. 39

2) $\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{r}{a}<\sqrt{2}$. Es evidente que en este caso $S=a^2-8\sigma$, donde σ es el área del triángulo curvilíneo rayado (fig. 38). Tenemos:

$$\sigma=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}r^2\varphi,$$

donde $\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}$. Para hallar x observemos que

$$x\sqrt{2}+\sqrt{r^2-a^2}=a,$$

de donde

$$x=\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma=\frac{1}{2}a\left(a-\sqrt{r^2-a^2}\right)-\frac{1}{2}r^2\operatorname{arcsen}\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{r\sqrt{2}}.$$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{r}{a} < \frac{\sqrt{5}}{2}$. Aquí $S = 8\sigma$, donde σ es el área del triángulo curvilíneo rayado (fig. 39). Tenemos:

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2\varphi - \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{2}} x,$$

donde

$$\varphi = \operatorname{arcsen} \frac{x}{r}.$$

Observando que

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + x\sqrt{2},$$

hallamos:

$$x = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2} - a}{2\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{4r^2 - a^2} - a}{2\sqrt{2}r} - \frac{a\left(\sqrt{4r^2 - a^2} - a\right)}{8}.$$

4) $\frac{r}{a} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. El área buscada es igual a cero.

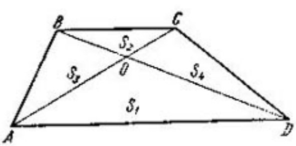

FIG. 40

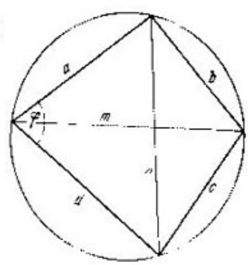

FIG. 41

323. Tenemos (fig. 40):

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{1}$$

A continuación,

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S_1}{S_4} = \frac{AO}{OC},$$

de donde $S_3S_4 = S_1S_2$. Pero, evidentemente, tenemos que

$$S_3 + S_1 = S_4 + S_1,$$

por lo tanto, $S_3 = S_4$ y $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1S_2}$.
Por consiguiente, de (1) obtenemos que

$$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

324. Designando por a, b, c y d las longitudes de los lados y por m, n las longitudes de las diagonales del cuadrilátero (fig. 41); por el teorema de los cosenos tenemos:

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi,$$
$$n^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi.$$

De aquí

$$(bc + ad)\, n^2 = (a^2 + d^2)\, bc + (b^2 + c^2)\, ad = (ab + cd)(ac + bd).$$

Por consiguiente,

$$n^2 = \frac{ab+cd}{bc+ad}(ac+bd).$$

Análogamente hallaremos:

$$m^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd).$$

Multiplicando estas igualdades entre sí, obtendremos el teorema de Ptolomeo:

$$mn = ac+bd.$$

2. Problemas de construcción

325. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas. Trazamos la recta O_1A y a través del centro O_2 de la segunda circunferencia una recta paralela a O_1A que corta la segunda circunferencia en los puntos M y N

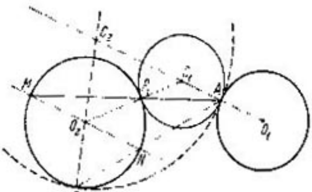

FIG 42

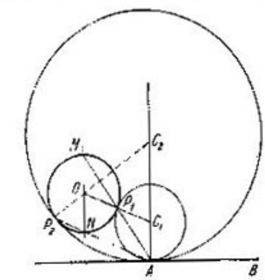

FIG. 43

(fig 42). La recta MA intersecará la segunda circunferencia en el punto P_1. La recta O_2P_1 intersecará la O_1A en el punto C_1. De la semejanza de los triángulos MO_2P_1 y AC_1P_1 se deduce:

$$C_1A = C_1P_1.$$

Por consiguiente, la circunferencia de centro C_1 y de radio C_1A es la circunferencia buscada. La segunda resolución se obtiene con ayuda del punto N lo mismo que la primera con ayuda del punto M. Si una de las rectas MA o NA resulta tangente a la segunda circunferencia, entonces queda una solución y la segunda dará esta tangente (el centro de la circunferencia se encontrará en el infinito). Esto tendrá lugar cuando, y sólo cuando, el punto A coincida con el punto de tangencia de una de las cuatro tangentes comunes a las circunferencias dadas.

326. Sea O el centro de la circunferencia dada y AB la recta dada (fig. 43). El problema se resuelve de forma análoga al anterior. En el caso general tiene dos resoluciones. Habrá los casos particulares siguientes: 1) la recta dada interseca la circunferencia y el punto dado A coincide con uno de los puntos de intersección (no hay ninguna solución); 2) la recta dada hace contacto con la circunferencia y el punto A no coincide con el punto de intersección (tiene una solución). 3) la recta dada hace contacto con la circunferencia y el punto A coincide con el punto de intersección (tiene una cantidad infinita de soluciones).

327. A través del centro O de la circunferencia dada trazamos una recta perpendicular a la recta dada l, que corta la circunferencia en los puntos M y N

(fig. 44). La recta MA intersecará la l en el punto P_1. El punto C_1 es el punto de intersección de la perpendicular a la recta l levantada en el punto P_1 con la recta OA. De la semejanza de los triángulos AOM y AC_1P_1 se desprende que $C_1A = C_1P_1$. Por consiguiente, la circunferencia de centro C_1 y radio C_1A es la buscada. La segunda resolución se obtiene con ayuda del punto N lo mismo que la primera con ayuda del punto M. Si la recta l no pasa por ninguno de los puntos A, M y N y el punto A no coincide con M o con N, entonces el problema siempre tiene dos soluciones.

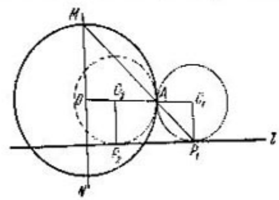

FIG. 44

Supongamos que A no coincide con M o con N; si l pasa a través de M o de N, entonces el problema tiene una sola solución (la segunda circunferencia coincide con la circunferencia dada); si l pasa por A, el problema no tiene ninguna solución.

Supongamos que A coincide con M; si l no pasa por ninguno de los puntos M y N, entonces el problema tiene una sola solución (la segunda pasa a la recta l); si l pasa por N, la solución será la circunferencia dada y si l pasa por M, el problema tiene una cantidad infinita de soluciones

328. Valiéndonos de la hipotenusa dada $AB = c$ como diametro, tracemos una circunferencia con su centro en el punto O (fig. 45). Tracemos $OE \perp AB$ y marquemos sobre OE el segmento $OF = h$. La recta paralela a AB que pasa por F intersecará la circunferencia en el punto buscado C. El problema es

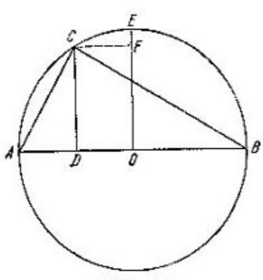

FIG. 45

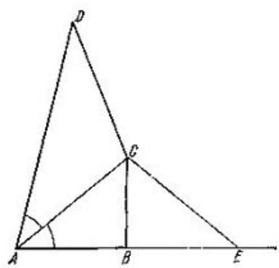

FIG. 46

soluble si $h \leqslant \frac{c}{2}$. Las longitudes de los catetos a y b se hallaran con ayuda del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ ab &= hc. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos:

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2hc} + \sqrt{c^2 - 2hc}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2hc} - \sqrt{c^2 - 2hc}\right)$$

329. Tomamos el segmento AB y sobre la recta AB trazamos el segmento $AE = AD$ (fig. 46). Tomando como basa a BE construimos el triángulo BCE con los lados BC y $EC = CD$. Sobre el segmento AC como base, construimos el $\triangle ACD$ con los lados AD y CD. El cuadrilátero $ABCD$ es el buscado, puesto que tiene los lados dados y el $\angle DAC = \angle CAE$ (los triángulos ACD y ACE son iguales por construcción).

330. Admitamos que sean H, S y M los puntos de intersección de la altura, la bisectriz y la mediana respectivamente con la circunferencia circunscrita K que tiene por centro el punto O (fig. 47). Tracemos la recta SO y a través del punto H una recta paralela a SO que cortará por segunda vez a K en el punto A. Tracemos la recta AM que intersecará a SO en el punto P. A través de P tracemos una recta perpendicular a SO que cortará a la circunferencia en los puntos B y C. El triángulo ABC es el buscado, puesto que $AH \perp BC$, $\breve{BS} = \breve{SC}$ y $BP = PC$. El problema es soluble si, y sólo si, H, S y M no se encuentran en una misma recta, la tangente a la circunferencia K en el punto H no es paralela a SO y si los puntos H y M se encuentran a diferentes lados de la recta SO, pero no en un mismo diámetro de la circunferencia K.

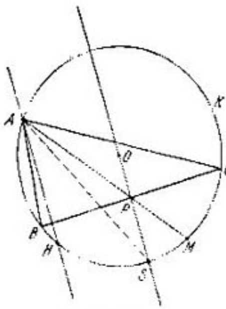

FIG. 47

331. A. Caso de tangencia exterior. Desde el punto O de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo ABC bajemos las perpendiculares OM, ON y OP a los lados del triángulo (fig. 48). Entonces $AP = AN$, $BP = BM$ y $CM = CN$. Por consiguiente, las circunferencias de radios AP, BM y CN cuyos centros son A, B y C tendrán contacto una con la otra en los puntos P, M y N.

B. Caso de tangencia interior. Desde el punto O de intersección de la bisectriz del ángulo C con las bisectrices de los ángulos externos A y B bajemos

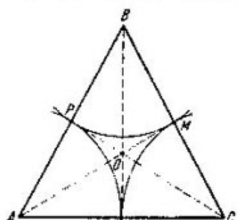

FIG. 48

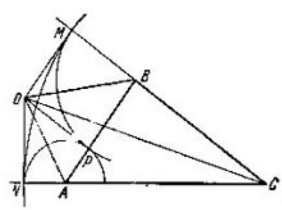

FIG. 49

las perpendiculares OM, ON y OP a los lados (o a las prolongaciones de los lados) del triángulo ABC (fig. 49). Entonces,

$$AP = AN, \quad BP = BM, \quad CM = CN.$$

Por consiguiente, las circunferencias de radios AP, BM y CN cuyos centros son los puntos A, B y C tendrán contacto una con la otra en los puntos P, M y N.

Obtendremos dos soluciones más tomando las bisectrices del ángulo interno A y los externos B y C o del ángulo interno B y los ángulos externos A y C.

332. La resolución se basa en la siguiente propiedad: si las alturas h_A y h_B del triángulo inscrito ABC cortan a la circunferencia en los puntos A_1 y B_1, entonces el vértice C divide el arco A_1B_1 por la mitad (fig. 50). Esto se desprende de la igualdad de los ángulos $\angle A_1AC$ y $\angle B_1BC$, cada uno de los cuales es igual a $\frac{\pi}{2} - \angle ACB$.

Construcción. A través del punto A trazamos una recta en la dirección dada hasta su intersección con la circunferencia en el punto A_1; admitamos que sea B_1 el punto de intersección de la altura h_B con la circunferencia; hallamos el punto medio C del arco A_1B_1 y trazamos AC; trazamos $B_1B \perp AC$; el triángulo ABC es el buscado.

La segunda solución $AB'C'$ se obtiene si se toma el punto medio C' del segundo arco A_1B_1.

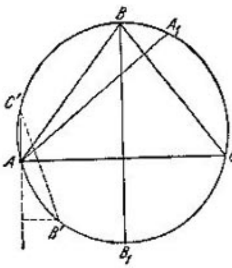

FIG. 50

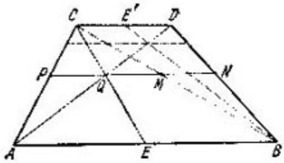

FIG. 51

333. Unamos el punto medio E de la base AB con el vértice C y hallemos el punto Q de intersección de las rectas EC y AD (fig. 51). La recta $PQMN$ paralela a AB es la buscada. En efecto,

$$\frac{PQ}{QM}=\frac{AE}{EB}=1,$$

de donde $PQ=QM$; luego,

$$\frac{MN}{CD}=\frac{PQ}{CD},$$

de donde $MN=PQ$. La segunda solución se obtiene con ayuda del punto medio E' de la base CD de la misma manera que la primera con ayuda del E.

334. Supongamos que se ha construido el cuadrado $ABCD$, además, B es el vértice dado, E y F son los puntos dados (fig. 52). El vértice D deberá encontrarse en la circunferencia construida tomando a EF como diámetro. Admitamos que BD corta a la circunferencia en el punto K. Entonces, $\breve{EK}=\breve{KF}$, puesto que $\angle ADB=\angle BDC$.

Construcción. Tomando EF como diámetro, construyamos una circunferencia y desde su centro levantemos una perpendicular a EF hasta su intersección con la circunferencia en los puntos K y K'; unamos B con K y prolonguemos BK hasta su intersección con la circunferencia en el punto D; tracemos las rectas DE y DF y a través del punto B, las perpendiculares BA y BC a estas últimas rectas. $ABCD$ es el cuadrado buscado. La segunda solución se obtiene haciendo uso del punto K'. El problema tiene siempre dos soluciones, excepto en el caso cuando el punto B se encuentra en la circunferencia de diámetro EF. En este último caso el problema no tiene solución si el punto B no coincide con uno de los puntos K o K'.

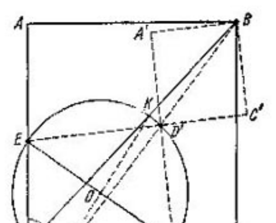

FIG. 52

335. Primera solución. Tracemos $AD \parallel MB$ hasta su intersección con la prolongación de BC en el punto D (fig. 53). En el segmento CD hallamos el punto N tal, que

$$\frac{CD}{CN}=k.$$

La recta MN es la buscada, ya que el área $S_{ABM}=S_{DBM}$, por consiguiente, $S_{ABC}=S_{DMC}$ y de acuerdo con la construcción $S_{DMC}=kS_{NMC}$.

La segunda solución la obtendremos valiéndonos del punto N_1 tal, que

$$\frac{CD}{N_1D}=k.$$

Entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABN_1M}}=k.$$

Teniendo en cuenta la posibilidad de una construcción análoga partiendo del vértice C (en vez del A), es fácil convencerse de que si $k \neq 2$ el problema tiene siempre dos soluciones y si $k=2$, sólo una.

336. Para la construcción es suficiente conocer la altura $h=KL$ del rectángulo.

Supongamos que sea $KLMN$ el rectángulo buscado y que KN se encuentra sobre el lado AC (fig. 54). Si se traslada el vértice B paralelamente a la base

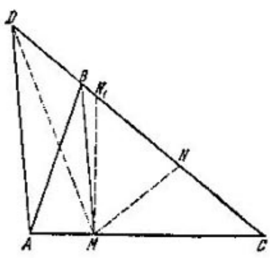

FIG. 53

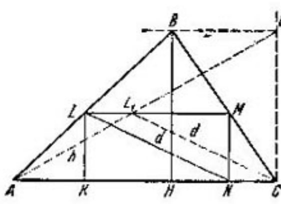

FIG. 54

AC y se conserva al mismo tiempo la magnitud h constante, entonces se conservarán también constantes las magnitudes de la base y de la diagonal del rectángulo (puesto que LM constituye la misma parte de AC que $BH-h$ de BH). Por consiguiente, para hallar h el triángulo dado ABC puede ser sustituido por cualquier otro con la misma base AC y la misma altura BH. Es más cómodo tomar un triángulo con un ángulo recto en la base. De aquí obtenemos la siguiente construcción. Trazamos a través de B una recta paralela a AC y a través de C una recta perpendicular a AC; desde el vértice del ángulo recto C, con una abertura del compás igual a la longitud d de la diagonal dada, hacemos una intersección L_1 en la hipotenusa AB_1; a través de L_1 trazamos una recta paralela a AC; los puntos L y M de intersección de esta recta con los lados AB y BC son los vértices del rectángulo buscado. Según que la altura del triángulo AB_1C bajada desde C sea menor, igual o mayor que la magnitud dada d, el problema tendrá dos soluciones, una o no tendrá solución.

337. Inscribimos en el ángulo dado la circunferencia dada. Desde los puntos de tangencia A y B en los lados del ángulo, trazamos los segmentos AC y BD iguales al lado dado del triángulo (fig. 55).

Inscribamos en el ángulo dado una segunda circunferencia de modo que haga contacto con los lados del ángulo en los puntos C y D. Tracemos una tangente común EF a las circunferencias construidas. Demostremos que el $\triangle SEF$, obtenido de esta manera, es el buscado. Para ello, es suficiente demostrar que $AC=FE$. No es difícil convencerse de que el perímetro del $\triangle SEF$ es igual a $2SC$; por otro lado, este perímetro, evidentemente, es igual a $2(SA+EL+LF)$. Así pues,

$$SC=SA+EL+LF,\ SA+AC=SA+EF,$$

es decir,

$$AC=EF,$$

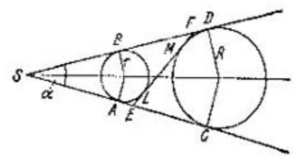

FIG 55

con lo cual el problema queda demostrado.

Está claro que el problema tiene dos soluciones si las circunferencias no se intersecan y una solución cuando éstas tienen contacto. En el caso cuando las circunferencias se intersecan el problema en insoluble. Supongamos que sea α el ángulo dado, r y R los radios de las circunferencias y a el lado dado del triángulo. La distancia entre los centros de las circunferencias es igual a

$$\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Para que el problema sea soluble es necesario que

$$R+r\geqslant\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Pero,

$$R=r+a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

y, por consiguiente, deberá ser

$$2r+a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

o bien

$$\frac{2r}{a}\geqslant\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

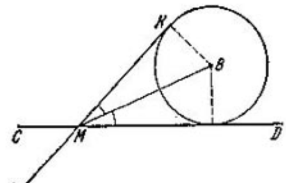

FIG. 56

338. Tomando como centro el punto B, trazamos una circunferencia que hace contacto con la recta CD (fig. 56). Desde el punto A (si A y B se encuentran a distintos lados de la recta CD, o desde el punto A', simétrico a A respecto a CD, si A y B se encuentran a un mismo lado de CD) trazamos la tangente AK a la circunferencia construida. El punto M de intersección de AK (o $A'K$) con la recta CD es precisamente el buscado. En efecto $\angle AMC=\angle KMD=2\angle BMD$.

3. Problemas de demostración

339. Sea BO una mediana del triángulo ABC; construyamos a base del triángulo ABC el paralelogramo $ABCD$ (fig. 57). Del triángulo BCD tenemos que $2BO < BC + CD$ y, puesto que, $CD = AB$, entonces

$$BO < \frac{AB+BC}{2}.$$

Del $\triangle AOB$ y $\triangle BOC$ tenemos:

$$BO + \frac{AC}{2} > AB,$$

$$BO + \frac{AC}{2} > BC.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos:

$$BO > \frac{AB+BC}{2} - \frac{AC}{2}.$$

340. Supongamos que sea D el punto de intersección de las alturas, O el centro de la circunferencia circunscrita y E y F los puntos medios de los lados BC y AC (fig. 58). Los triángulos ADB y EOF son semejantes puesto que $\angle ABD = \angle OFE$ y $\angle BAD = \angle OEF$ (como ángulos con lados paralelos). Por consiguiente,

$$\frac{OE}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}.$$

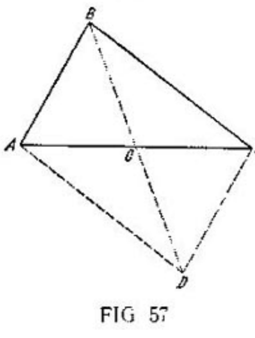

FIG. 57

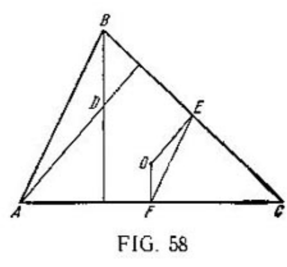

FIG. 58

341 Véase la resolución del problema 301.

342. Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo, opuestos respectivamente a los ángulos A, B y C. Demostremos que la longitud l_A de la bisectriz del ángulo A se expresa por la fórmula

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \qquad (1)$$

En efecto, el área del triángulo ABC es igual a

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}cl_A \operatorname{sen}\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_A \operatorname{sen}\frac{A}{2}.$$

De aquí se deduce la fórmula (1). Análogamente, para la bisectriz l_B del ángulo

B obtendremos la fórmula

$$l_B = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}. \qquad (2)$$

Admitamos que sea $a > b$; entonces $\angle A > \angle B$, y puesto que además $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ por lo tanto, $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$. Así pues, el numerador de la fracción (1) es menor que el numerador de la fracción (2). Además, el denominador $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ de la fracción (1) es mayor que el denominador $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ de la fracción (2), ya que $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Por consiguiente, $l_A < l_B$

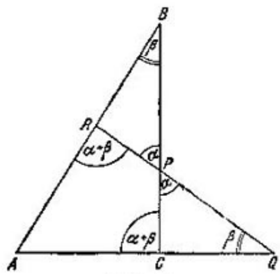

FIG. 59

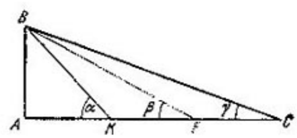

FIG 60

343. Sea, el $\angle CPQ = \alpha$ y $\angle PQC = \beta$ (fig. 59). Según el teorema de los senos tenemos:

$$\frac{RB}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{BP}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \quad \frac{PC}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{CQ}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \frac{AQ}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{AR}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos.

$$RB \cdot PC \cdot QA = PB \cdot QC \cdot RA.$$

344. Sea el $\angle AKB = \alpha$, el $\angle AFB = \beta$ y el $\angle ACB = \gamma$ (fig. 60). Tenemos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y, puesto que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3},$$

entonces

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

De aquí $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$ y $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

345. Valgámonos del teorema inverso al teorema de Pitágoras: si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, este triángulo es rectángulo. En el caso dado, la relación

$$(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$$

se cumple, puesto que es equivalente a la igualdad evidente $ab=ch$.

346. Primera resolución. Tracemos AE de manera tal, que $\angle EAC=20°$ y $BD \perp AE$ (fig. 61). Puesto que el $\triangle CAE \backsim ABC$, entonces

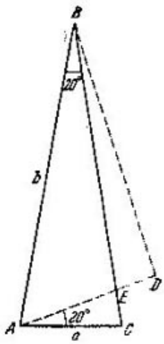

FIG. 61

$$\frac{CE}{a}=\frac{a}{b},$$

de donde

$$CE=\frac{a^2}{b} \quad \text{y} \quad BE=b-\frac{a^2}{b}.$$

Por otro lado, el $\angle BAD=60°$, en virtud de lo cual

$$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}b, \qquad AD=\frac{b}{2}$$

y, puesto que $AE=a$, $ED=\frac{b}{2}-a$. Por eso,

$$BE=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-a\right)^2+\frac{3}{4}b^2}.$$

Por consiguiente,

$$b-\frac{a^2}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-a\right)^2+\frac{3}{4}b^2}.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y realizando las simplificaciones correspondientes, hallaremos que esta relación es equivalente a la relación a demostrar.

Segunda resolución. Puesto que $a=2b$ sen 10°, la relación a demostrar es equivalente a la siguiente:

$$1+8\,\text{sen}^3\,10°=6\,\text{sen}\,10°,$$

o bien

$$\text{sen}\,30°=3\,\text{sen}\,10°-4\,\text{sen}^3\,10°.$$

La última igualdad se cumple en virtud de la fórmula general

$$\text{sen}\,3\alpha=3\,\text{sen}\,\alpha-4\,\text{sen}^3\alpha.$$

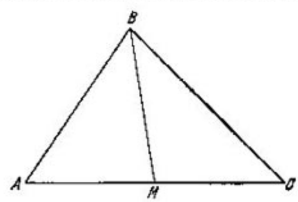

FIG. 62

347. En todo triángulo, frente a mayor lado se encuentra mayor ángulo. Por esta razón, si en el $\triangle ABC$ (fig. 62)

$$AC<ABM,$$

lo que es equivalente a las dos desigualdades:

$$AM<BM, \qquad MC<BM,$$

entonces,

$$\angle ABM<\angle BAM, \qquad \angle MBC<\angle BCM.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos

$$\angle ABC<\angle BAM+\angle BCM=\pi-\angle ABC,$$

de donde

$$2\angle ABC < \pi \text{ o bien } \angle ABC < \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente se examinan los casos $AC \geqslant 2BM$.

348. Primera resolución. Sea $QQ' \parallel AC$ y N el punto de intersección de AQ' con QC (fig. 63). En la figura, con arcos llenos se designan los ángulos cuyos valores son evidentes.

Demostremos que

$$QP \perp AQ'. \tag{1}$$

En efecto, $NC = AC$; pero, $AC = PC$ puesto que el $\triangle ACP$ es isósceles. Por eso, $NC = PC$ y, por consiguiente, el $\triangle NCP$ es también isósceles, de lo que se desprende que

$$\angle CNP = \angle NPC = 80°.$$

De aquí, obtenemos fácilmente que $\angle Q'NP = 180° - 60° - 80° = 40°$ y, puesto que $\angle NQ'P = 40°$, el triángulo $QQ'P$ es igual al QNP. De aquí se deduce (1). Ahora está claro que el $\angle Q'PQ = 50°$ y, por consiguiente, el $\angle QPA = 180° - 50° - 50° = 80°$.

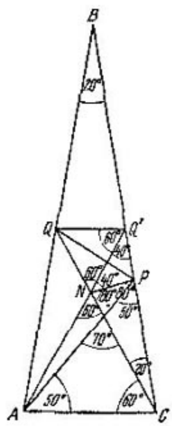

FIG. 63

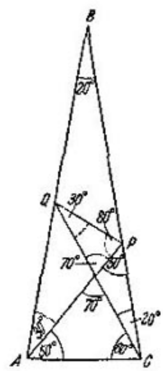

FIG. 64

Segunda resolución (véase la fig. 64). Es fácil ver que el ángulo $P = 80°$ cuando, y sólo cuando, $\triangle ABP \backsim \triangle PCQ$ (los ángulos cuyos valores se desprenden directamente de las condiciones del problema, se dan en la figura con arcos llenos). Demostremos que estos triángulos son en efecto semejantes. Para ello, en virtud de la igualdad de los ángulos ABP y PCQ, es suficiente verificar que

$$\frac{AB}{CQ} = \frac{PB}{CP}. \tag{1}$$

Hagamos $AB = l$; entonces, del triángulo isósceles CQB tenemos:

$$CQ = \frac{l}{2\cos 20°}.$$

Por otro lado, puesto que $PC = AC$,

$$PC = 2l \operatorname{sen} 10°, \quad BP = l - 2l \operatorname{sen} 10°.$$

Colocando estas expresiones en (1), obtendremos la igualdad equivalente:

$$4 \text{ sen } 10^\circ \cos 20^\circ = 1 - 2 \text{ sen } 10^\circ. \qquad (2)$$

Es fácil revelar la validez de esta última igualdad observando que

$$\text{sen } 10^\circ \cos 20^\circ = \frac{\text{sen } (10^\circ + 20^\circ) + \text{sen } (10^\circ - 20^\circ)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \text{ sen } 10^\circ.$$

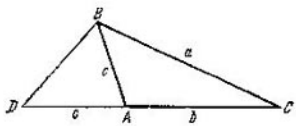

FIG. 65

349. Sea dado el $\triangle ABC$ (fig. 65). Sobre la prolongación del lado AC trazamos $AD = c$. De la igualdad $a^2 = b^2 + bc$ se deduce:

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}.$$

Esto significa que los triángulos CAB y CBD son semejantes y $\angle A = \angle CBD$. Además, $\angle B = \angle BDA = \angle DBA$. Por consiguiente, $\angle A = \angle B + \angle DBA = 2 \angle B$.

350. Supongamos que sea OC la mediana del triángulo OAB_1. Admitamos que el punto D se encuentre en la prolongación de OC y $OC = CD$ (véase la fig. 66). Demostremos que $\triangle AOD = \triangle OA_1B$. En efecto, $AO = OA_1$ según la construcción. Luego, AOB_1D es un paralelogramo, en virtud de lo cual $AD = OB_1 = OB$. Por fin $\angle OAD = \angle A_1OB$, puesto que los lados de estos ángulos son perpendiculares entre sí: $AO \perp OA_1$ y $OB_1 \perp OB$ según la construcción, y $AD \parallel OB_1$. Por consiguiente, $\triangle AOD = \triangle OA_1B$ y dos de los lados de uno de ellos son respectivamente perpendiculares a dos lados del otro. Por eso, los terceros lados son también perpendiculares, es decir, $OD \perp A_1B$

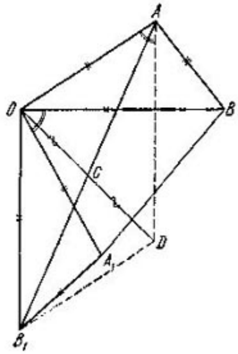

FIG. 66

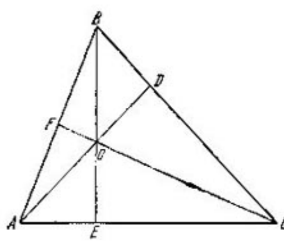

FIG. 67

351. Sea ABC un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas que se cruzan en el punto O (fig. 67). Cada uno de los cuadriláteros $BDOF$, $CEOD$ y $AFOE$ están inscritos en cierta circunferencia. Por el teorema del producto de la secante por su parte externa, tenemos:

$$AD \cdot AO = AB \cdot AF = AC \cdot AE, \quad BE \cdot BO = BC \cdot BD = BA \cdot BF,$$
$$CF \cdot CO = CA \cdot CE = CB \cdot CD.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos:

$$2(AD\cdot AO+BE\cdot BO+CF\cdot CO)=AB\cdot AF+BC\cdot BD+CA\cdot CE+AC\cdot AE+$$
$$+BA\cdot BF+CB\cdot CD=AB\,(AF+BF)+BC\,(BD+CD)+CA\,(CE+AE)=$$
$$=(AB)^2+(BC)^2+(CA)^2,$$

con lo cual el problema queda demostrado. En el caso de un triángulo obtusángulo, el producto correspondiente al ángulo obtuso debe tomarse con el signo menos.

352. Según la condición del problema $b-a=c-b$, ó $a+c=2b$. Para calcular el producto Rr valgámonos de las expresiones para el área del triángulo en función del radio de la circunferencia circunscrita o inscrita y el lado. Es conocido que $S=\frac{1}{2}\,bc\operatorname{sen}A$, y por el teorema de senos $\operatorname{sen}\,A=\frac{a}{2R}$, de donde

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

Por otro lado, $S=rp$, donde p es el semiperímetro. Igualando ambas expresiones, tendremos:

$$rR=\frac{abc}{4p}. \qquad (1)$$

En las condiciones del problema

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}\,b.$$

Coloquemos este valor de p en (1), obtendremos:

$$6rR=ac.$$

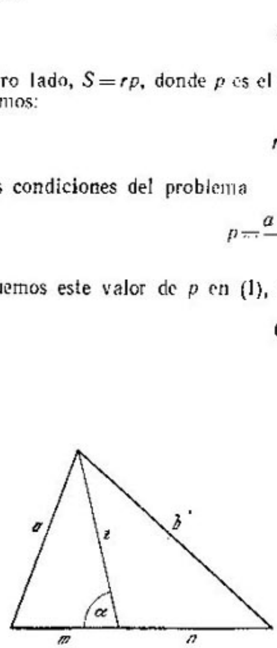

FIG. 68

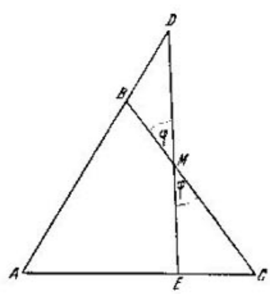

FIG. 69

353. Sea z la longitud de la bisectriz y m y n las longitudes de los segmentos en que ésta divide a la base del triángulo (fig. 68). Por el teorema de los cosenos

$$a^2=z^2+m^2-2mz\cos\alpha,$$
$$b^2=z^2+n^2+2nz\cos\alpha.$$

Multiplicando la primera de estas igualdades por n y la segunda por m y sumando los resultados, obtendremos:

$$na^2+mb^2=(m+n)\,(z^2+mn). \qquad (1)$$

En virtud de la relación $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ tenemos.

$$na^2+mb^2=na\frac{mb}{n}+mb\frac{na}{m}=ab\,(m+n).$$

Colocando esta expresión en (1), obtendremos la igualdad requerida

$$ab=z^2+mn.$$

En el caso en que sea $a=b$ y $m=n$, la igualdad demostrada expresará el teorema de Pitágoras. $a^2=z^2+m^2$.

354. Según la condición del problema $BD=EC$ (fig. 69). Si M es el punto de intersección de BC con DE, entonces, del $\triangle BDM$ y del $\triangle ECM$ tenemos:

$$\frac{BD}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{DM}{\operatorname{sen}B}, \qquad \frac{EC}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{ME}{\operatorname{sen}C},$$

de donde

$$\frac{DM}{ME}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}.$$

Pero en el $\triangle ABC$

$$\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}=\frac{AC}{AB}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{DM}{ME}=\frac{AC}{AB}$$

355. Sean BD, BE y BF respectivamente una altura, una bisectriz y una mediana en el triángulo ABC. Supongamos que $AB<BC$.

Entonces

$$\angle A>\angle C, \qquad \angle CBD>\angle ABD,$$

de donde

$$\angle CBD>\frac{1}{2}(\angle ABD+\angle CBD)=\frac{1}{2}\angle B,$$

es decir, $\angle CBD>\angle CBE$. Por lo tanto, la bisectriz BE pasa por dentro del $\angle CBD$ y el punto E se encuentra entre D y C.

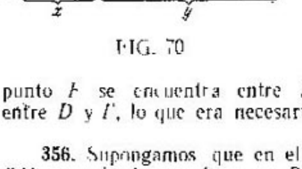

FIG. 70

Luego,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}<1, \qquad AE<EC,$$

de donde,

$$AE<\frac{1}{2}(AE+EC)=\frac{1}{2}AC,$$

es decir, $AE<AF$. Por consiguiente, el punto F se encuentra entre E y C. Así pues, el punto F se encuentra entre D y C, lo que era necesario demostrar

356. Supongamos que en el triángulo ABC, BD es una de las bisectrices, BM, una de las medianas y BN, una recta simétrica con BM respecto a BD (fig. 70). Si S_{ABN} y S_{MBC} son las áreas de los respectivos triángulos, entonces

$$2S_{ABN}=xh_B=nc\operatorname{sen}\angle ABN,$$

$$2S_{MBC}=\frac{x+y}{2}h_B=ma\operatorname{sen}\angle MBC,$$

donde h_B es la altura bajada a AC desde el vértice B. Puesto que $\angle ABN = \angle MBC$, entonces

$$x=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{nc}{ma}. \tag{1}$$

Análogamente

$$2S_{NBC}=yh_B=na\operatorname{sen}\angle NBC,$$

$$2S_{ABM}=\frac{x+y}{2}h_B=mc\operatorname{sen}\angle ABM.$$

Puesto que $\angle NBC=\angle ABM$, entonces

$$y=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{na}{mc}.$$

Dividiendo miembro a miembro (1) por (2), obtendremos:

$$\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2},$$

lo que había que demostrar.

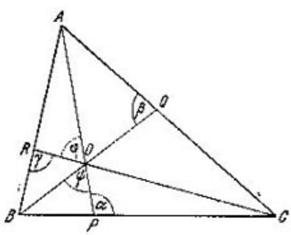

FIG. 71

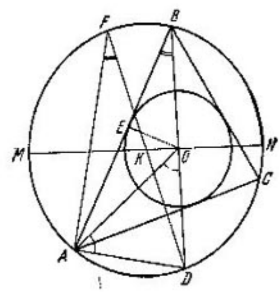

FIG. 72

357. Las rectas AP, BQ y CR dividen al triángulo ABC en seis triángulos: $\triangle AOR$, $\triangle ROB$, $\triangle BOP$, $\triangle POC$, $\triangle COQ$, $\triangle QOA$ (fig 71). Aplicando el teorema de los senos a cada uno de ellos, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\frac{AR}{\operatorname{sen}\varphi}&=\frac{AO}{\operatorname{sen}\gamma},\\ \frac{BO}{\operatorname{sen}\gamma}&=\frac{BR}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)},\\ \frac{CQ}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}&=\frac{CO}{\operatorname{sen}\beta},\end{aligned}\right|\quad\begin{aligned}\frac{AO}{\operatorname{sen}\beta}&=\frac{AQ}{\operatorname{sen}\psi},\\ \frac{BP}{\operatorname{sen}\psi}&=\frac{BO}{\operatorname{sen}\alpha},\\ \frac{CO}{\operatorname{sen}\alpha}&=\frac{CP}{\operatorname{sen}\varphi}.\end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro todas estas igualdades entre sí, hallamos:

$$AR\cdot BP\cdot CQ=BR\cdot AQ\cdot CP.$$

358. Supongamos que sea K el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, O el centro de la circunferencia inscrita en el mismo triángulo y D el punto medio del arco AC (véase la fig. 72). Cada uno de los ángulos $\angle OAD$ y $\angle AOD$ es igual a la semisuma de los ángulos en los vértices A y B del triángulo ABC. De aquí se desprende que $OD=AD$.

Por el teorema de las cuerdas que se cruzan dentro de una circunferencia, tenemos que

$$MO \cdot ON = BO \cdot OD.$$

Luego, si $OE \perp AB$ y FD es el diámetro, entonces los triángulos BOE y FDA son semejantes, de donde $BO:OE = FD:AD$, así que $BO \cdot AD = OE \cdot FD$ ó, puesto que $AD = OD$, $BO \cdot OD = OE \cdot FD$. Por consiguiente,

$$MO \cdot ON = OE \cdot FD.$$

Colocando en esta igualdad los valores $MO = R + l$, $ON = R - l$, $OE = r$, $FD = 2R$, obtendremos $R^2 - l^2 = 2Rr$, lo que era necesario demostrar.

359. Primera resolución. Supongamos que sea ABC el triángulo dado, K_1 la circunferencia inscrita de radio r y K_2 la circunferencia circunscrita de radio R. Construyamos un triángulo auxiliar $A_1B_1C_1$ de modo que sus lados sean paralelos a los del $\triangle ABC$ y pasen por los vértices de éste (fig. 73). Tracemos tangentes a la circunferencia K_2, paralelas a los lados del $\triangle A_1B_1C_1$, conforme a la siguiente regla: la tangente A_2B_2, paralela al lado A_1B_1, hace contacto con K_2 en un punto que se encuentra en el mismo arco $\widetilde{AB}$ que el vértice C, etc. Los segmentos de las tangentes trazadas forman el triángulo $A_2B_2C_2$.

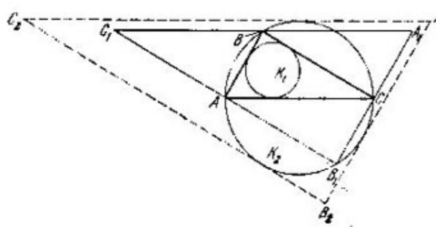

FIG 73

Entonces, el $\triangle A_1B_1C_1$ se encuentra dentro del $\triangle A_2B_2C_2$ y estos dos triángulos son semejantes. Por esta razón, el radio R' de la circunferencia inscrita en el $\triangle A_1B_1C_1$ no es mayor que el radio R de la circunferencia K_2 inscrita en el $\triangle A_2B_2C_2$, es decir, $R' \leqslant R$; por otro lado, la relación entre los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos semejantes $A_1B_1C_1$ y ABC es igual a la relación entre los lados semejantes de estos triángulos, es decir, $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$. Así pues, $R' = 2r$. Confrontando esta igualdad con la desigualdad $R' \leqslant R$, obtendremos definitivamente:

$$2r \leqslant R.$$

Segunda resolución. Sean r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, S el area del triángulo dado, p el semiperímetro y a y b dos de sus lados. Entonces,

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{pR} = \frac{1}{2}\,\frac{ab \operatorname{sen} C}{pR} = \frac{2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{R(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}.$$

Pero,

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} +$$

$$+ 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 4 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{r}{R}=4 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

El problema se reduce a la demostración de la desigualdad

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

(veáse el problema 644).

Tercera resolución. De la fórmula $l^2=R^2-2Rr$ demostrada en el problema anterior, se desprende que $R^2-2Rr \geqslant 0$, de donde $R \geqslant 2r$.

360. Sean a y b las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa. Comparando las dos expresiones para el área del triangulo, obtenemos:

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\, r=\frac{1}{2} hc,$$

de donde

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}. \tag{1}$$

Puesto que $a+b>c$, entonces,

$$\frac{r}{h}<\frac{c}{c+c}=0{,}5.$$

Luego, en virtud de la relación $c^2=a^2+b^2$, la desigualdad $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ es equivalente a la desigualdad $2c^2 \geqslant (a+b)^2$, o bien $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. De aquí que

$$\frac{r}{h} \geqslant \frac{c}{c\sqrt{2}+c}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0{,}4$$

361. Supongamos que sean A, B y C los ángulos del triángulo, a, b y c los lados opuestos a estos ángulos y $P=a+b+c$. La relación necesaria se desprende de las igualdades

$$ak_a=bk_b+ck_c=Pr \tag{1}$$

$$(b+c)\, k_a+(c+a)\, k_b+(a+b)\, k_c=PR, \tag{2}$$

sumando las cuales obtendremos que

$$k_a+k_b+k_c=r+R.$$

La igualdad (1) es justa en virtud de que sus partes izquierda y derecha son iguales al área duplicada del triángulo. Para demostrar la igualdad (2) observemos que

$$k_a=R\cos A, \quad k_b=R\cos B, \quad k_c=R\cos C \tag{3}$$

y que

$$\begin{aligned} b\cos C+c\cos B&=a,\\ c\cos A+a\cos C&=b,\\ a\cos B+b\cos A&=c, \end{aligned}$$

de donde, sumando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos la igualdad

$$(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=P,$$

que después de multiplicarla por R y hacer uso de (3), coincide con (2).

362. Admitamos que sean A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 las líneas medias en el $\triangle ABC$ y A_3, B_3, C_3 los puntos medios de los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 (fig. 74). Los puntos A_3, B_3 y C_3 se encuentran en las líneas medias del $\triangle ABC$ y, además, no en los extremos de estas líneas, puesto que de lo contrario, por lo menos uno de los puntos A_1, B_1, C_1 coincidiría con un vértice del triángulo ABC. Puesto que toda recta que no pasa por uno de los vértices del triángulo $A_2B_2C_2$ no corta al mismo tiempo sus tres lados, entonces, los puntos A_3, B_3, C_3 no encuentran en una misma recta.

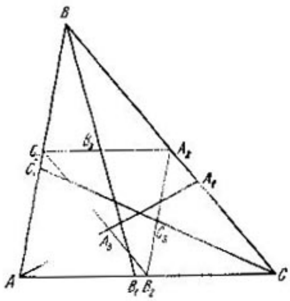

FIG. 74

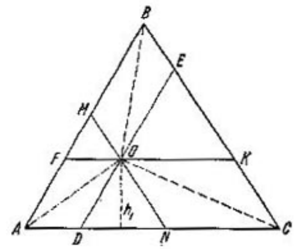

FIG. 75

363. Si h_1 es la altura del $\triangle DON$, h_B la altura del $\triangle ABC$ y S_{AOC} y S_{ABC} las áreas de los respectivos triángulos, entonces (fig. 75),

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{h_1}{h_B}=\frac{OD}{AB}=\frac{AF}{AB}$$

y análogamente

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}, \quad \frac{S_{COB}}{S_{ABC}}=\frac{CN}{CA}.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=\frac{S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

364. 1) Examinemos la circunferencia K' de radio r' inscrita en el cuadrado y tracemos las tangentes a esta circunferencia $A'B' \parallel AB$ y $B'C' \parallel BC$ (fig. 76).

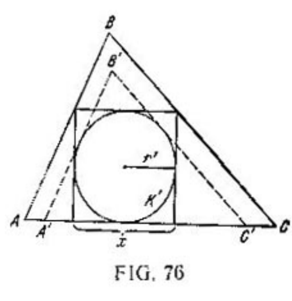

FIG. 76

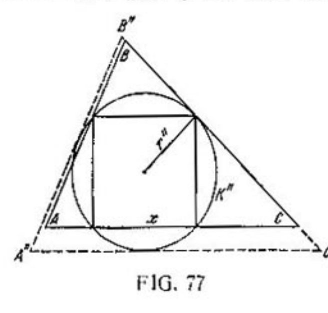

FIG. 77

Está claro que el $\triangle A'B'C'$ se encuentra dentro del $\triangle ABC$, por lo cual $A'C' < AC$. Puesto que $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$, entonces

$$\frac{r'}{r}=\frac{A'C'}{AC}<1,$$

de donde $x = 2r' < 2r$.

2) Examinemos la circunferencia K'' de radio r'' circunscrita al cuadrado y tracemos las tangentes a esta circunferencia $A''B'' \parallel AB$, $B''C'' \parallel BC$ y $A''C'' \parallel AC$ (fig. 77). Es evidente que el $\triangle ABC$ se encuentra dentro del $\triangle A''B''C''$ y, por lo tanto, $A''C'' > AC$. Puesto que

$$\triangle A''B''C'' \backsim \triangle ABC,$$

entonces,

$$\frac{r''}{r} = \frac{A''C''}{AC} > 1,$$

de donde

$$x = \sqrt{2}\, r'' > \sqrt{2}\, r.$$

365. Supongamos que sea M el punto de intersección de las alturas AA_1, BB_1 y CC_1 del triángulo ABC; P el centro de la circunferencia circunscrita de radio R; C_2, A_2 y B_2 los puntos medios de los lados AB, BC y AC; $OM = OP$; $ON \perp AC$; A_3, B_3 y C_3 los puntos medios de AM, BM y CM

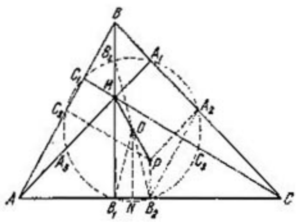

FIG. 78

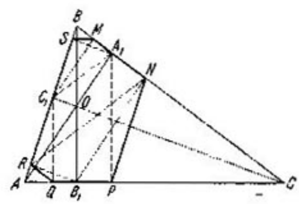

FIG. 79

(fig. 78). Demostremos que el punto O equidista de A_i, B_i y C_i, donde $i = 1, 2, 3$. Puesto que ON es la línea media en el trapecio MB_1B_2P, entonces $OB_1 = OB_2$. De la semejanza de los triángulos AMB y PA_2B_2 hallamos que $BM = 2PB_2$ y, por lo tanto, $B_3M = PB_2$. Del paralelogramo MB_3PB_2 tenemos que $OB_3 = OB_2$. Pero

$$OB_3 = \frac{1}{2} BP = \frac{R}{2}$$

(como línea media en el triángulo PMB). Por consiguiente,

$$OB_3 = OB_2 = OB_1 = \frac{R}{2}$$

De manera análoga se demuestra que $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OC_1 = OC_2 = OC_3 = \frac{R}{2}$.

366. Supongamos que AA_1, BB_1 y CC_1 son las alturas del triángulo ABC, que se cruzan en el punto O, $C_1M \parallel B_1N \perp BC$, $A_1P \parallel C_1Q \perp AC$, $B_1R \parallel A_1S \perp AB$ (fig. 79).

1) Demostremos que $SM \parallel AC$. Tenemos que $\triangle BA_1A \backsim \triangle BC_1C$ como triángulos rectángulos con el ángulo agudo ABC común. De aquí

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}.$$

Por consiguiente, $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$ y $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. En el $\triangle A_1BC_1$ los segmentos A_1S y C_1M son alturas. Por esta razón, repitiendo los razonamientos anteriores, mostremos que $\angle BSM = \angle BA_1C_1$. Por consiguiente,

$\angle BSM = \angle BAC$ y $SM \parallel AC$. De análoga forma se demuestra que $PN \parallel AB$ y que $RQ \parallel BC$.

2) Para demostrar que los vértices del hexágono $MNPQRS$ se encuentran en una misma circunferencia, es suficiente demostrar que cuatro cualesquiera de sus vértices consecutivos se encuentran en una misma circunferencia. Esto se desprende del hecho de que por tres puntos no pertenecientes a una misma recta puede ser trazada solamente una circunferencia. Se tienen dos tipos de cuatro vértices sucesivos del hexágono que se examina: tales, en los que los puntos medios se encuentran en distintos lados del $\triangle ABC$ ($RSMN$, $MNPQ$, $PQRS$) y tales, en los que los puntos medios se encuentran en un mismo lado del $\triangle ABC$ ($NPQR$, $QRSM$, $SMNP$).

Examinemos los cuatro vértices $RSMN$ y $NPQR$ (de distintos tipos). De la proporcionalidad obvia

$$\frac{BC_1}{BR} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{BA_1}{BN}$$

se deduce que $NR \parallel A_1C_1$. Por eso

$$\angle MNR = \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle BSM.$$

Por consiguiente, $\angle MNR + \angle MSR = \pi$ y los puntos R, S, M y N pertenecen a una misma circunferencia. Luego,

$$\angle PNR + \angle PQR = \pi - (\angle PNC + \angle BNR) + \pi - \angle AQR =$$
$$= 2\pi - (\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB) = \pi,$$

de donde se deriva que los puntos N, P, Q y R están dispuestos también en una misma circunferencia. De forma análoga se lleva a cabo la demostración para los demás conjuntos de cuatro vértices.

367. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del $\triangle ABC$, y D el centro de esta circunferencia (fig. 80). Puesto

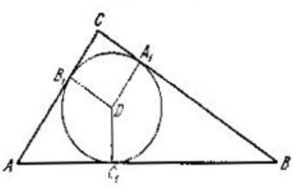

FIG. 80

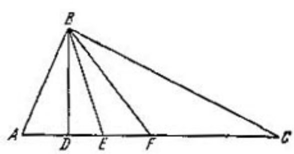

FIG. 81

que los segmentos de las tangentes a una circunferencia trazadas desde un mismo punto son iguales entre si, entonces

$$CA_1 = CB_1, \quad BA_1 = BC_1, \quad AB_1 = AC_1.$$

Al mismo tiempo,

$$DB_1 = CA_1, \quad B_1C = A_1D.$$

Por consiguiente,

$$AC + BC = CA_1 + A_1B + CB_1 + B_1A = B_1D + A_1D + BC_1 + AC_1 = 2r + 2R,$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita, y R es el radio de la circunferencia circunscrita.

368. Supongamos que en el triángulo ABC, ABC es el ángulo recto, BD es la altura, BE es la bisectriz y BF la mediana (fig. 81). Puesto que $BF = FC$, entonces $\angle CBF = \angle ACB$. Pero

$$\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \angle ACB.$$

Por consiguiente, $\angle ABD = \angle CBF$ y

$$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \angle CBE - \angle CBF = \angle FBE,$$

lo que era necesario demostrar.

369. La disposición simétrica de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ respecto al centro O de la circunferencia inscrita significa que los respectivos puntos de dichos triángulos se encuentran en una misma recta con O y equidistan de éste (fig. 82). En particular, $OC = OC_1$, $OB = OB_1$ y BCB_1C_1 es un paralelogramo; por lo tanto, $BC = B_1C_1$. Análogamente $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ y $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Examinando los paralelogramos ABA_1B_1, BDB_1D_1, ACA_1C_1 y ECE_1C_1 hallamos que $AD = A_1D_1$, $AE = A_1E_1$ y, puesto que $\angle A = \angle A_1$, $\triangle ADE = \triangle A_1D_1E_1$. Análogamente $\triangle B_1EK_1 = \triangle BE_1K$ y $\triangle DC_1K = \triangle D_1CK_1$.

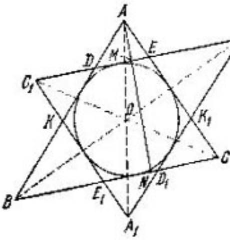

FIG 82

Introduzcamos las siguientes denotaciones:

S es el área del $\triangle ABC$,
S_1, el área del $\triangle ADE$,
S_2, el área del $\triangle DC_1K$,
S_3, el área del $\triangle KBE_1$,

$$AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b,$$

h_A, h_B y h_C son las alturas bajadas de los vértices A, B y C. Entonces,

$$S = pr = \frac{ah_A}{2} = \frac{bh_B}{2} = \frac{ch_C}{2}$$

Sea AM una altura en el $\triangle ADE$ y AN una altura en el $\triangle ABC$; entonces

$$S_1 = \frac{DE \cdot AM}{2}.$$

De la semejanza de los triángulos ABC y ADE, hallamos

$$DE = \frac{a(h_A - 2r)}{h_A}.$$

Por consiguiente,

$$S_1 = \frac{a(h_A - 2r)^2}{2h_A} = \frac{a\left(\frac{2pr}{a} - 2r\right)^2}{2h_A} = \frac{r^2(p-a)^2}{S}$$

Análogamente,

$$S_2 = \frac{r^2(p-c)^2}{S}, \quad S_3 = \frac{r^2(p-b)^2}{S}.$$

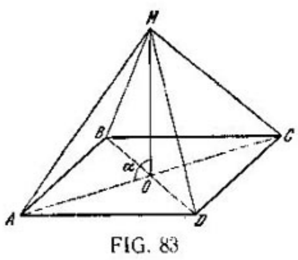

FIG. 83

Empleando la fórmula de Herón, obtenemos:

$$S^2S_1^2S_2^2S_3^2 = \frac{r^{12}(p-a)^4(p-b)^4(p-c)^4S^2}{S^6} = r^{12}\frac{S^4}{p^4} = r^{16}.$$

370. En las denotaciones de la fig. 83 tenemos:

$$MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cos\alpha,$$
$$MC^2 = MO^2 + CO^2 + 2MO \cdot CO \cos\alpha.$$

Puesto que $AO = CO$, entonces, sumando estas igualdades, obtendremos:

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + 2AO^2. \tag{1}$$

Análogamente

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + 2BO^2.$$

Por consiguiente, la diferencia

$$(MA^2+MC^2)-(MB^2+MD^2)=2(AO^2-BO^2)$$

no depende de la posición del punto M.

371. Sea O el punto de intersección de las rectas AA_1 y CC_1 (véase la fig. 84). El problema quedará resuelto si se demuestra que

$$\angle AOB+\angle AOB_1=180^\circ. \qquad (1)$$

Observemos que $\triangle C_1BC=\triangle ABA_1$, ya que $C_1B=AB$, $BC=BA_1$ y $\angle C_1BC=60^\circ+\angle ABC=\angle ABA_1$. Por lo tanto, $\angle OC_1B=\angle OAB$ y el cuadrángulo OAC_1B está inscrito en cierta circunferencia. Por consiguiente, $\angle AOB=120^\circ$. De

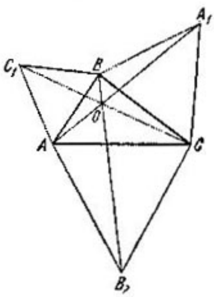

FIG. 84

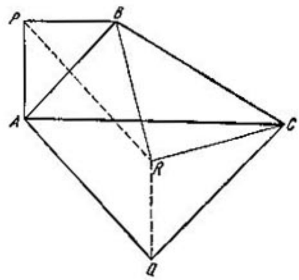

FIG. 85

forma análoga demostremos que $\angle BOC=120^\circ$. Pero entonces también $\angle AOC=120^\circ$, de donde se desprende que el cuadrángulo $AOCB_1$ está inscrito en cierta circunferencia. Pero, de aquí se deriva, al mismo tiempo, que $\angle AOB_1=\angle ACB_1=60^\circ$ Por esta razón, la fórmula (1) es válida.

372. En las anotaciones de la fig. 85 tenemos:

$$\angle PBR=\angle ABC$$

y

$$\frac{PB}{AB}=\frac{BR}{BC}.$$

Esto significa que $\triangle PBR \backsim \triangle ABC$ y análogamente $\triangle QRC \backsim \triangle ABC$. Valiéndonos de este hecho obtendremos:

$$\angle APR=\angle APB-\angle BPR=\angle APB-\angle BAC,$$

de donde

$$\angle APR+\angle PAQ=\angle APB+2\angle PAB=\pi,$$

así que $PR\|AQ$ De forma análoga demostraremos que $QR\|AP$.

373. Designemos por h_B, h_C y h_D las distancias desde los vértices B, C y D del paralelogramo hasta la recta AO (fig. 86). En este caso tiene lugar la siguiente propiedad: la mayor de estas distancias es igual a la suma de las otras dos Por ejemplo, si AO cruza al lado BC, (como en la fig. 86), entonces, trazando $BE\|AO$ y $CE\perp AO$, de la igualdad de los triángulos BEC y $AD'D$ hallaremos,

$$h_D=h_B+h_C$$

Análogamente, si AO cruza al lado CD, entonces $h_B=h_C+h_D$; si AO no cruza los lados BC y CD, entonces, $h_C=h_B+h_D$. De esta propiedad, para el caso expuesto en la fig. 86, se deduce directamente la igualdad de las areas de los triángulos:

$$S_{AOC}=S_{AOD}-S_{AOB}.$$

En general, evidentemente, se puede escribir la fórmula

$$S_{AOC}=|S_{AOD}\pm S_{AOB}|,$$

donde se toma el signo más, si los puntos B y D se encuentran a un mismo lado de AO, y el signo menos, si los puntos B y D se encuentran a distintos lados de AO.

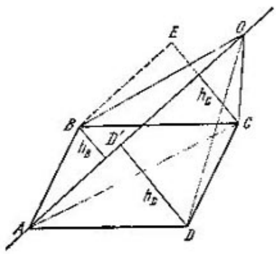

FIG 86

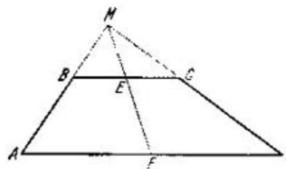

FIG 87

La repetición de este razonamiento para la recta CO en vez de la AO conduce a la fórmula análoga

$$S_{AOC}=|S_{COD}\pm S_{COB}|$$

con la misma regla de elección de los signos, pero respecto a la recta CO.

374. Construyamos a base del trapecio $ABCD$ el triángulo AMD y unamos el punto M con el punto medio F de la base AD (fig. 87). Entonces

$$ME=\frac{BC}{2},\quad MF=\frac{AD}{2}.$$

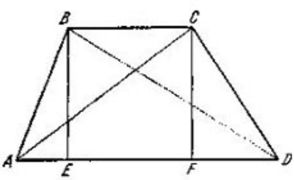

FIG. 88

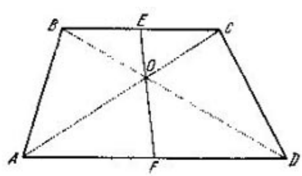

FIG. 89

Por consiguiente,

$$EF=\frac{AD-BC}{2}.$$

375. Supongamos que sea $ABCD$ el trapecio dado con las bases AD y BC, y que $BE\perp AD$ y $CF\perp AD$ (fig. 88). Tenemos:

$$AC^2-AF^2=CD^2-FD^2,$$
$$BD^2-ED^2=AB^2-AE^2.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$AC^2+BD^2-AB^2+CD^2+AF^2-FD^2+ED^2-AE^2=$$
$$=AB^2+CD^2+AD(AF-FD+ED-AE)=$$
$$=AB^2+CD^2+AD\cdot 2EF=AB^2+CD^2+2AD\cdot BC.$$

376. Sea dado el trapecio $ABCD$ con sus bases paralelas AD y BC, E es el punto medio de BC, F el punto medio de AD y O el punto de intersección de las diagonales (fig. 89). Los triángulos AOF y COE son semejantes (esto se deriva de la semejanza de los triángulos AOD y COB). Por esta razón, $\angle AOF = \angle COE$, es decir, EOF es una recta.

377. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado y los puntos M y N los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente (véase la fig. 90). Giremos el cuadrilátero $AMND$ $180°$ en el plano del dibujo alrededor del vértice N. Entonces, el vértice D coincidirá con el C, y los vértices M y A ocuparán las posiciones M' y A'. Además, los puntos M, N y M' se dispondrán en una misma recta y, al mismo tiempo, tendremos que $M'A' \parallel MB$ y $M'A'=MB$.

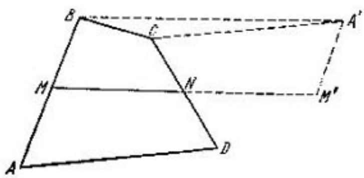

FIG. 90

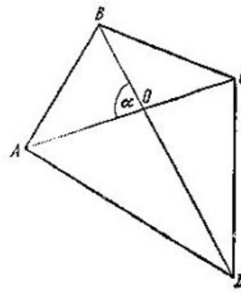

FIG. 91

Por consiguiente $MBA'M'$ es un paralelogramo y $A'B=M'M=2MN$. Puesto que por la condición del problema $BC+AD=2MN$, entonces, $BC+CA'=A'B$. Por consiguiente, el punto C se encuentra en el segmento $A'B$; en el caso contrario tendríamos que en el $\triangle BCA'$, $BC+CA'>A'B$. De aquí se desprende que $BC \parallel MN \parallel AD$ es decir, que $ABCD$ es un trapecio.

378. Hallemos la expresión para el área de un cuadrilátero en función de sus diagonales y el ángulo formado por éstas. Sea O el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y $\angle BOA=\alpha$ (fig. 91). Entonces, el área del cuadrilátero dado será igual a

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{COD}+S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot \operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot \operatorname{sen}\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot \operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

De esta fórmula se deduce, precisamente, la justeza de la afirmación a demostrar.

379. Sea M el punto interior del polígono convexo y AB su lado más cercano al punto M. Demostremos que el pie de la perpendicular P bajada desde el punto M a AB se encuentra en AB y no en su prolongación (fig. 92). En efecto, si P se encontrara fuera de AB, MP cortaría a cierto lado l del polígono en el punto Q, además, en virtud de la convexidad del polígono, $MQ<MP$. Pero la distancia DM de M a l es menor que MQ y, por consiguiente, también menor que MP, lo que contradice a la elección del lado AB.

380. Sean AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 las bisectrices de los ángulos internos del paralelogramo $ABCD$, que forman en su intersección el paralelogramo $PQRS$ (fig. 93). Es evidente que $BB_1 \parallel DD_1$ y $AA_1 \parallel CC_1$. Además,

$$\angle APB = \pi - (\angle BAP + \angle ABP) = \pi - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi,$$

lo que significa que $PQRS$ es un rectángulo. Los triángulos BAB_1 y CDC_1 son

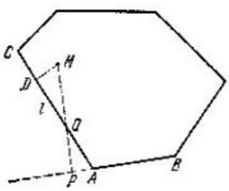

FIG. 92

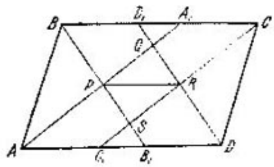

FIG. 93

isósceles, ya que sus bisectrices son perpendiculares a sus bases. Por esta razón, $BP = PB_1$, $D_1R = RD$ y, por lo tanto, $PR \parallel AD$. Así pues, $PRDB_1$ es un paralelogramo y

$$PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB.$$

381. Sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de los cuadrados construidos a base de los lados del paralelogramo $ABCD$ (fig. 94). Tenemos.

$$\triangle O_1BO_2 = \triangle O_3CO_2,$$

puesto que $O_1B = O_3C$, $BO_2 = CO_2$ y

$$\angle O_1BO_2 = \angle MBN + \frac{\pi}{2} = \angle DCB + \frac{\pi}{2} = \angle O_3CO_2.$$

Por consiguiente, $O_1O_2 = O_3O_2$ y

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2B + \angle BO_2C - \angle O_3O_2C = \angle BO_2C = \frac{\pi}{2}.$$

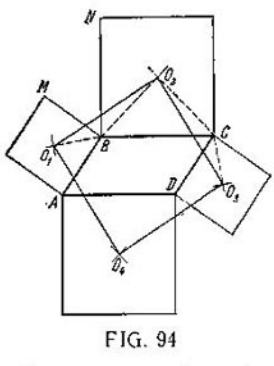

FIG. 94

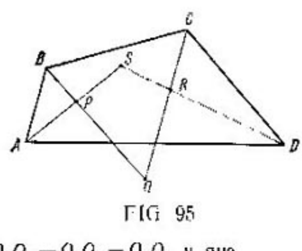

FIG. 95

De la misma manera se demuestra que $O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ y que

$$\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, $O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado.

382. Admitamos que sean AP, BQ, CR y DS las bisectrices de los ángulos internos del cuadrilátero $ABCD$ (fig. 95). Sean, además, A, B, C y D los valores de estos ángulos. Entonces,

$$\angle ASD = \pi - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D, \quad \angle BQC = \pi - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$\angle ASD + \angle BQC = 2\pi - \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 2\pi - \frac{1}{2}2\pi = \pi.$$

Por consiguiente, los puntos P, Q, R y S se encuentran en una misma circunferencia.

383. Sean A y B los puntos de tangencia, M un punto arbitrario de la circunferencia y $MN \perp AB$, $MD \perp AC$, $ME \perp BC$ (véase la fig. 96). Demostremos que los triángulos DMN y NME son semejantes. Con este fin, observemos que a los cuadriláteros $ADMN$ y $NMEB$ se les puede circunscribir circunferencias, puesto que

$$\angle MNA + \angle ADM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

y

$$\angle MEB + \angle BNM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

De aquí que $\angle MND = \angle MAD$ y $\angle MEN = \angle MBN$. Pero $\angle MAD = \angle MBN$, puesto que cada uno de ellos abarca la mitad del arco AM. Así pues, $\angle MND = \angle MEN$. De análoga forma se establece la igualdad $\angle NDM = \angle ENM$.

De la semejanza de los triángulos DMN y NME obtenemos que

$$\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{ME},$$

lo que había que demostrar.

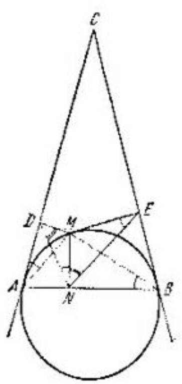

FIG. 96

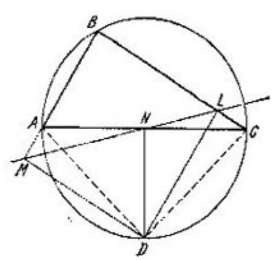

FIG. 97

384. Sea ABC el triángulo inscrito en la circunferencia, D el punto de la circunferencia y L, M y N los pies de las perpendiculares (fig. 97). Unamos el punto M con el N y el punto N con el L, y demostremos que los ángulos ANM y LNC son iguales.

Observemos, para ello, que

$$\angle ANM = \angle ADM, \tag{1}$$

puesto que al cuadrilátero $MAND$ se le puede circunscribir una circunferencia. Por la misma causa

$$\angle LNC = \angle LDC; \tag{2}$$

por otra parte,

$$\angle ADC = \angle MDL. \tag{3}$$

En efecto, $\angle ADC + \angle B = 180°$, puesto que en suma estos dos ángulos abarcan la circunferencia completa; al mismo tiempo, $\angle MDL + \angle B = 180°$, ya que al cuadrilátero $MBLD$ se le puede circunscribir una circunferencia. Por consiguiente, la igualdad (3) es justa. Del dibujo está claro que, en este caso,

$$\angle LDC = \angle ADM,$$

y, entonces, de (1) y (2) se desprende la igualdad

$$\angle ANM = \angle LNC,$$

que era necesario demostrar.

385. Demostremos que cada dos de los tres segmentos O_1A_1, O_2A_2 y O_3A_3 se dividen por la mitad en el punto de su intersección. De aquí se desprende

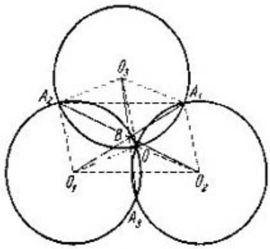

FIG. 98

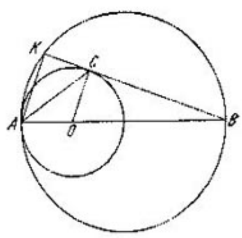

FIG. 99

que los tres segmentos indicados se cruzan en un mismo punto. Por ejemplo, demostremos que los segmentos O_1A_1 y O_2A_2 se dividen por la mitad en el punto de su intersección B (véase la fig. 98.). En virtud de la igualdad de las circunferencias deducimos que $O_2A_1O_3O$ y $O_1A_2O_3O$ son rombos. De aquí se deriva que los segmentos O_2A_1, OO_3 y O_1A_2 son iguales y paralelos. Por esta razón, $O_1A_2A_1O_2$ es un paralelogramo y el punto B de intersección de sus diagonales O_1A_1 y O_2A_2 divide a éstas por la mitad.

386. Sea O el centro de la circunferencia menor (fig. 99). Entonces, $AK \parallel OC$, puesto que $AK \perp BK$ y $OC \perp BK$. Además, $OA = OC$. Por consiguiente,

$$\angle KAC = \angle ACO = \angle CAO.$$

387. Del examen de la fig. 100 está claro que

$$\frac{R-r}{r} = \frac{R}{a},$$

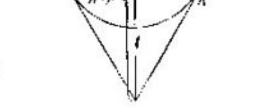

FIG. 100

pero, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

388. Son posibles tres casos. Estos tres casos están representados en la fig. 101, *a*, *b*, *c*. En el primer caso las tangentes fijas son paralelas, el ángulo $COD = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, por eso. $CE \cdot ED = OE^2$, es decir, $AC \cdot BD = r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. En los casos segundo y tercero, valiéndonos de las anotaciones, fáciles de comprender en la fig., hallamos que $\alpha+\beta \pm \gamma=\frac{\pi}{2}$, es decir, $\alpha \pm \gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$, de donde se desprende que $\triangle AOC$ es semejante a $\triangle BDO$ y, por lo tanto,

$$\frac{AC}{AO}=\frac{OB}{BD}.$$

Por consiguiente,

$$AC\cdot BD=AO^2=r^2$$

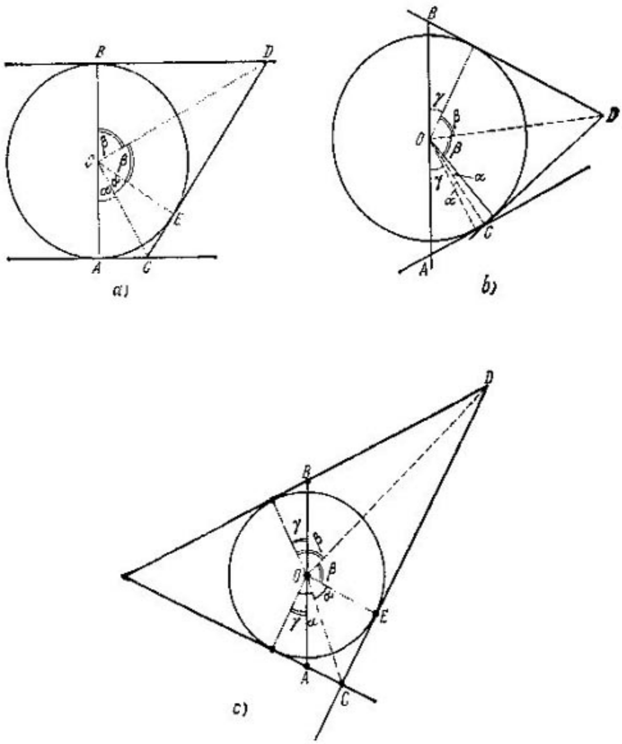

FIG. 101

389. Supongamos que sea M el punto de intersección de las cuerdas perpendiculares entre sí AB y CD (fig. 102). Tracemos $AK \parallel CD$, entonces, BK es el diámetro, $AK < CD$ y

$$BK^2=AB^2+AK^2<AB^2+CD^2.$$

luego, $KD=AC$ y, por lo tanto,

$$KB^2=BD^2+KD^2=BM^2+DM^2+AM^2+CM^2.$$

390. Sea $AC=CD=DB$ (fig. 103). Tracemos $OE \perp AB$. Entonces, OE es una de las alturas, y OC una de las medianas del $\triangle AOD$. Dado que la bisectriz del $\angle AOD$ se encuentra entre la mediana y la altura (véase el problema 355), entonces,

$$\angle AOC < \angle COD.$$

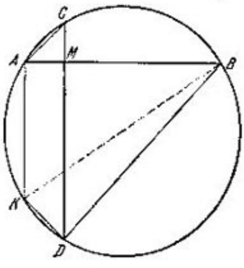

FIG. 102

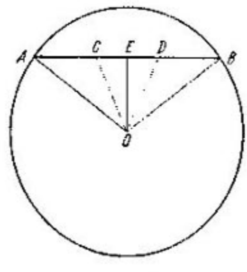

FIG. 103

391. Admitamos que sea AB el diámetro de la circunferencia y E el punto de intersección de las cuerdas AD y BC (fig. 104). Tenemos:

$$AE\cdot AD=AE^2+AE\cdot ED=AC^2+EC^2+AE\cdot ED.$$

Por la propiedad de las cuerdas que se cruzan

$$AE\cdot ED=BE\cdot EC.$$

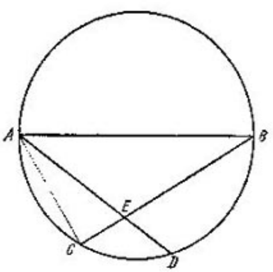

FIG. 104

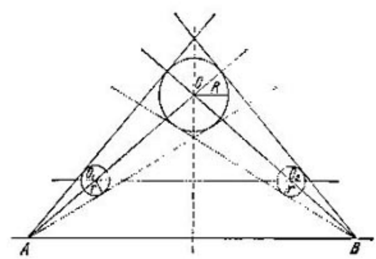

FIG. 105

Por eso,

$$AE\cdot AD=AC^2+EC^2+BE\cdot EC=AC^2+EC\cdot BC=$$
$$=AC^2+(BC-BE)\,BC=AC^2+BC^2-BE\cdot BC,$$

o definitivamente

$$AE\cdot AD+BE\cdot BC=AB^2.$$

392. Sean A y B los puntos dados, O el centro de la circunferencia dada, R el radio de esta circunferencia y r el radio de las circunferencias iguales inscritas, cuyos centros son O_1 y O_2 (fig. 105). Entonces,

$$\frac{R}{r}=\frac{OA}{O_1A}=\frac{OB}{O_2B}.$$

Tomando la derivada de la proporción, obtendremos:

$$\frac{OA}{OO_1}=\frac{OB}{OO_2}.$$

Por consiguiente, $O_1O_2 \parallel AB$.

393. Sean r_1 y r_2 los radios de las semicircunferencias inscritas en la semicircunferencia dada de radio R (fig. 106). Puesto que $R=r_1+r_2$, entonces, el área sombreada es igual a

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2=\frac{1}{2}\pi\left[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2\right]=\pi r_1 r_2.$$

Pero,

$$h^2=2r_1\cdot 2r_2=4r_1r_2.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{4}\pi h^2.$$

394. Si la recta que une los puntos A y B *no corta* a la circunferencia dada, entonces las tangentes AC y BD pueden ser trazadas de manera tal, que el

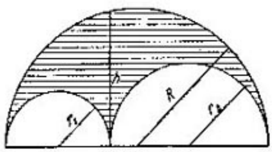

FIG. 106

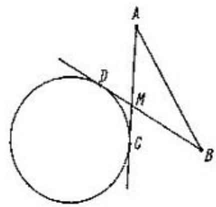

FIG. 107

punto de su intersección M se encuentre en los segmentos AC y BD (fig. 107). En el triángulo AMB tenemos:

$$AM+BM>AB>|AM-BM|,$$

y, dado que

$$AC>AM,\quad BD>BM,\quad MC=MD,$$

entonces,

$$AC+BD>AB>|AC-BD|.$$

Si la recta AB *cruza* a la circunferencia, son posibles dos casos: a) la cuerda cortada por la circunferencia en la recta AB, se encuentra en el segmento AB; b) esta cuerda se encuentra fuera del segmento AB.

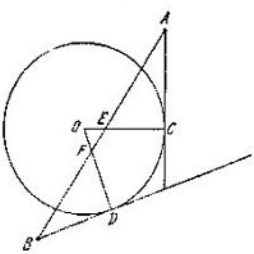

FIG. 108

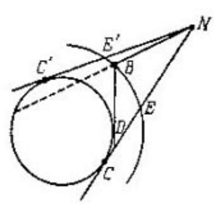

FIG. 109

En el caso a) (fig. 108) tenemos:

$$AB>AE+BF>AC+BD,$$

puesto que las hipotenusas AE y BF en los triángulos rectángulos AEC y BFD son mayores que los catetos AC y BD

En el caso b) el segmento AB se encuentra dentro del ángulo CAC' (fig. 109). Tracemos por el punto B una circunferencia concéntrica a la dada. Supongamos que esta circunferencia corta a AC y a AC' en los puntos E y L'. Entonces, $EC=BD$ y $AE>AB$. Por consiguiente,

$$AB<AE=AC-EC=AC-BD$$

395. Introduzcamos las siguientes anotaciones (fig. 110).

$$\angle PCM=\angle QCN=\alpha,\quad \angle NML=\angle NKL=\gamma,\quad \angle LCP=\angle QCK=\beta,$$
$$QC=x,\quad PC=y,\quad AC=CB=a.$$

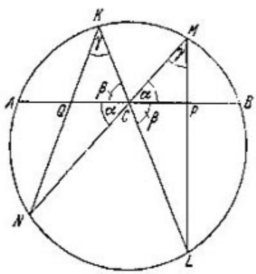

FIG. 110

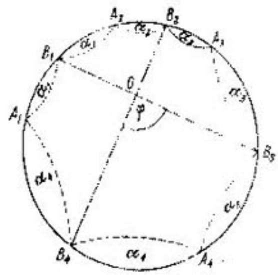

FIG. 111

De acuerdo con el teorema de los segmentos de las cuerdas que se cruzan de una circunferencia, tenemos que

$$NQ\cdot QK=AQ\cdot QB=a^2-x^2.$$

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos NQC y QCK, obtenemos:

$$NQ=\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)},\qquad QK=\frac{x\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Por consiguiente,

$$NQ\cdot QK=\frac{x^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}=a^2-x^2,$$

de donde,

$$x^2=\frac{a^2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Análogamente se determina que

$$y^2=\frac{a^2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Así pues, $x=y$.

396. Sean B_1, B_2, B_3 y B_4 los puntos medios de los arcos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 y A_4A_1 (fig. 111). Sea, además, α_i el ángulo central correspondiente al arco A_iB_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Designemos por φ al ángulo formado por los segmentos B_1B_3 y B_2B_4. Entonces,

$$\varphi=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2},$$

y, puesto que

$$2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4=2\pi,$$

entonces,

$$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

397. Elijamos los puntos A y B en la línea quebrada de manera que dividan su perímetro en dos partes iguales. Sea O el punto medio del segmento AB. Tracemos, tomando el punto O como centro, una circunferencia de radio $\frac{p}{4}$, donde p es el perímetro de la quebrada. Demostremos que esta circunferencia es la buscada. Supongamos lo contrario, o sea, que existe un punto M de la quebrada exterior a la circunferencia descrita. La longitud de la parte de la quebrada que contiene a M no es menor que $AM+BM$, es decir, $AM+BM \leqslant \frac{p}{2}$. Pero,

$$AM+BM \geqslant 2MO.$$

En efecto, del paralelogramo $AMBD$ (fig. 112) tenemos:

$$DM=2MO < BM+BD=AM+BM.$$

Puesto que $MO > \frac{p}{4}$, entonces, de la desigualdad $AM+BM \geqslant 2MO$ se desprende que $AM+BM > \frac{p}{2}$. Obtenemos una contradicción.

398. Tracemos por el vértice A del triángulo dado ABC la recta AD paralela a una de las rectas dadas x e y y que no corta al triángulo. A continuación,

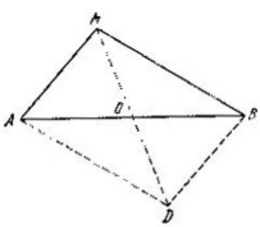

FIG. 112

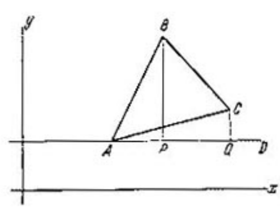

FIG. 113

bajemos desde los puntos B y C las perpendiculares BP y CQ a AD (fig. 113). Supongamos que las distancias desde los vértices del triángulo ABC hasta las rectas x e y se expresan por números enteros. Entonces las longitudes de los segmentos AP, AQ, BP y CQ también se expresarán por números enteros. En virtud de eso,

$$\operatorname{tg} \angle BAP=\frac{BP}{AP} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \angle CAQ=\frac{CQ}{AQ}$$

serán números racionales y, por lo tanto, será también racional el número

$$\operatorname{tg} \angle BAC=\frac{\operatorname{tg} \angle BAP-\operatorname{tg} \angle CAQ}{1+\operatorname{tg} \angle BAP \operatorname{tg} \angle CAQ}=\frac{\frac{BP}{AP}-\frac{CQ}{AQ}}{1+\frac{BP}{AP}\frac{CQ}{AQ}}.$$

Por esta razón, es imposible que el $\angle BAC=60°$, puesto que $\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}$ es un número irracional. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ no puede ser regular.

399. Supongamos que las rectas A_1B y AB_1 se crucen en el punto O y que sea $OD \perp AB$ (fig. 114). Puesto que $\triangle ABA_1 \backsim \triangle DBO$ y $\triangle BAB_1 \backsim \triangle DAO$, entonces,

$$\frac{OD}{a}=\frac{BD}{AB}, \qquad \frac{OD}{b}=\frac{AD}{AB}.$$

De aquí,

$$OD=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{AD+BD}{AB}=1.$$

Por consiguiente, la distancia

$$OD=\frac{ab}{a+b}$$

no depende de la disposición de los puntos A y B (si se conservan las magnitudes de a y b).

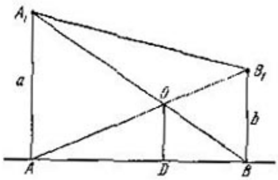

FIG. 114

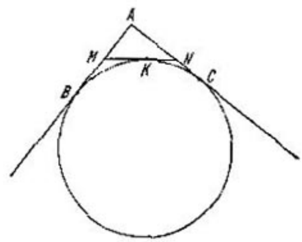

FIG. 115

400. Si K es el punto de tangencia del segmento MN con la circunferencia (fig. 115), entonces $BM=MK$ y $KN=NC$, de donde

$$MN=BM+CN \tag{1}$$

Pero, $MN < AM+AN$. Por eso

$$2MN < BM+AM+CN+AN=AB+AC,$$

de donde

$$MN<\frac{AB+AC}{2}.$$

Por otra parte, $MN > AN$ y $MN > AM$, puesto que MN es la hipotenusa del triángulo AMN. Por eso $2MN > AN+AM$ y, en virtud de (1) tenemos que $3MN > AN+NC+AM+MB=AB+AC$

Por consiguiente,

$$MN>\frac{AB+AC}{3}.$$

401. Sea ABC el triángulo dado, $AB=BC$, $BO \parallel AC$, O el centro de la circunferencia que hace contacto con AC; D y E los puntos de intersección de esta circunferencia con AB y BC (fig. 116). Prolonguemos el lado AB hasta su segunda intersección con la circunferencia en el punto F. Demostremos que $FE \perp BO$. Observemos que $\angle OBF=\angle OBE$, puesto que estos ángulos son iguales a los ángulos en la base AC del triángulo ABC. Luego, $BF=BE$, en efecto, si fuera $BF > BE$, entonces, trazando en BF el segmento $BE'=BE$, tendríamos que los triángulos OBE y OBE' son iguales y que $OE'=OE$, lo cual es imposible, puesto que el punto E' se encuentra dentro del círculo de radio OE; de análoga forma se demostrará que es imposible la desigualdad $BF < BE$. Pero la bisectriz BO del triángulo FBE deberá ser también su altura, lo que era necesario demostrar. Por esta razón, $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle ABC$ no depende de la posición del punto O en la recta BO. Por consiguiente, la magnitud del arco DE, cuya mitad se mide por el $\angle DFE$, durante la rodadura de la circunferencia permanece constante

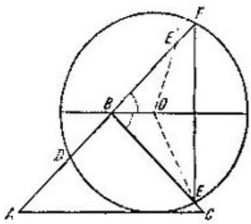

FIG. 116

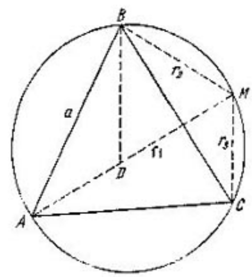

FIG. 117

402. Valiéndonos de las denotaciones introducidas al resolver el problema 324, hallamos:

$$n^2 = \frac{ab + cd}{bc + ad}(ac + bd), \qquad m^2 = \frac{bc + ad}{ab + cd}(ac + bd).$$

Dividiendo miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{n}{m} = \frac{ab + cd}{bc + ad}.$$

403. Sea ABC un triángulo regular con los lados a y r_1, r_2 y r_3 las distancias desde el punto M de la circunferencia circunscrita al triángulo hasta los vértices de éste (fig. 117). Observemos, al principio, que para la posición del punto M dada en la fig. 117 tendremos que

$$r_1 = r_2 + r_3.$$

En efecto, si trazamos $DM = r_2$, obtendremos el triángulo equilátero BMD. De aquí se desprende que $\angle ABD = \angle CBM$, en virtud de lo cual $\triangle ABD = \triangle CBM$ y, por lo tanto, $AD = r_3$. Aplicando al triángulo BMC el teorema de los cosenos, obtendremos:

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos 120^\circ = r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3.$$

Por consiguiente,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_2 + r_3)^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2(r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3) = 2a^2.$$

404. Supongamos que el lado AB del cuadrilátero $ABCD$ cruza a la circunferencia y que los lados BC, CD y DA hacen contacto con ella en los puntos E, F y G (fig 118). Puesto que $CE = CF$ y $DF = DG$, entonces, la desigualdad $AB + CD > BC + DA$ es equivalente a la desigualdad $AF > BE + AG$, que fue demostrada en la resolución del problema 394.

405. Supongamos que el lado AD del cuadrilátero $ABCD$ no corta a la circunferencia y que los lados BC, CD y BA hacen contacto con ésta en los puntos F, E y G (fig. 119). La desigualdad

$$AD+CB < DC+BA$$

es equivalente a la desigualdad

$$AD < DE+AG,$$

que fue demostrada en el problema 394.

406. Sea R el radio de las semicircunferencias dadas. Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son los radios de las circunferencias inscritas y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sus diámetros (fig. 120), está claro que al aumentar inconmensurablemente n la suma $d_1+d_2+\ldots+d_n$ tiende a R, es decir,

$$d_1+d_2+\ldots+d_n+\ldots=R \qquad (1)$$

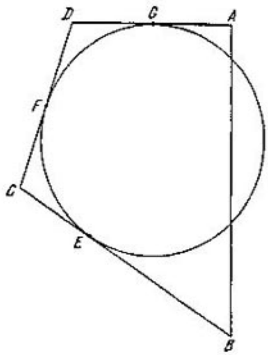

FIG. 118

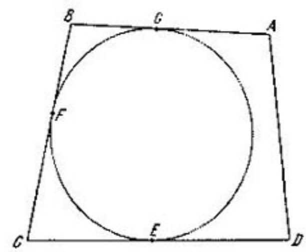

FIG. 119

Además, tenemos:

$$(R+r_1)^2=R^2+(R-r_1)^2, \qquad 2r_1=d_1=\frac{R}{1\cdot 2},$$

$$(R+r_2)^2=R^2+(R-d_1-r_2)^2, \quad 2r_2=d_2=\frac{R}{2\cdot 3}.$$

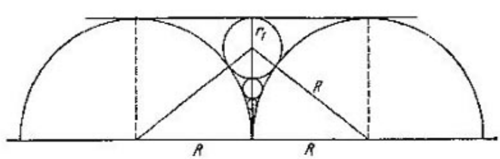

FIG. 120

Supongamos que sea $d_n=\frac{R}{n(n+1)}$. Demostremos que

$$d_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}.$$

Tenemos:

$$(R+r_{n+1})^2=R^2+(R-d_1-d_2-\ldots-d_n-r_{n+1})^2. \qquad (2)$$

Pero,

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=R\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=R\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=R\,\frac{n}{n+1}.$$

Colocando esta expresión en (2), hallaremos:

$$d_{n+1}=2r_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}.$$

Haciendo en la igualdad (1) $R=1$, obtendremos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

407. Sea O el centro de la mesa de billar, B el primer punto de rebotación y C el segundo punto de rebotación. Demostremos que si el $\angle ABC\neq 0$, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles (fig. 121). En efecto, el $\triangle BOC$ es isósceles, por lo tanto, $\angle OBC=\angle OCB$. Por la ley de reflexión (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de rebotación) $\angle OBC=\angle OBA$ y $\angle OCB=\angle OCA$. Así pues, $\angle ABC=\angle ACB$. Por consiguiente, el centro O se encuentra en la altura AD trazada al lado BC. La posición del punto B, hacia el cual hay que dirigir la bola para que después de rebotar de B y C pase por el punto A, se puede fijar dándonos el ángulo $\angle BOD=\alpha$. Tenemos:

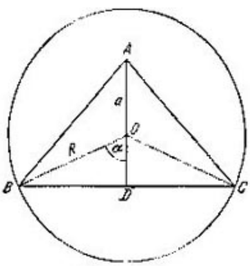

FIG 121

$$OD=R\cos\alpha,\quad BD=R\operatorname{sen}\alpha,\quad BA=\frac{BD}{\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=-\frac{BD}{\cos 2\alpha}$$

Puesto que BO es la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABD, entonces,

$$\frac{BD}{BA}=\frac{OD}{OA}$$

o bien

$$-\cos 2\alpha=\frac{R\cos\alpha}{a},$$

de donde obtenemos la ecuación para el $\cos\alpha$

$$\cos^2\alpha+\frac{R}{2a}\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos

$$\cos\alpha=-\frac{R}{4a}+\sqrt{\left(\frac{R}{4a}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Prescindimos de la segunda raíz puesto que, en virtud de que $R>a$, da el valor de $\cos\alpha<-1$.

Si suponemos ahora que $\angle ABC=0$, obtendremos la segunda solución del problema: los puntos B y C se encuentran en los extremos del diámetro que pasa por el punto A.

408. Sea S el vértice del ángulo dado α, A_1 el punto del primer encuentro del rayo con el espejo, SB_1 el lado del ángulo, en el que se encuentra el punto A_1, y SB_0 el otro lado del ángulo. Designemos los siguientes puntos de encuentro del rayo con los lados del ángulo por A_2, A_3, ..., de manera que el trayecto del rayo dentro del ángulo tendrá la forma de una línea quebrada $AA_1A_2A_3\ldots$ (fig. 122).

Tracemos sucesivamente, en sentido de rotación de SB_0 hacia SB_1, los ángulos B_1SB_2, B_2SB_3, ..., iguales al ángulo $\alpha=\angle B_0SB_1$. Tracemos en el lado SB_m ($m=2, 3, 4, \ldots$) el segmento $SA'_m=SA_m$ (los puntos A'_1 y A_1 coinciden) y demostremos que los puntos A'_1, A'_2, ... se encuentran en una misma recta. Para ello es suficiente demostrar que cada tres puntos sucesivos A'_m, A'_{m+1}, A'_{m+2}

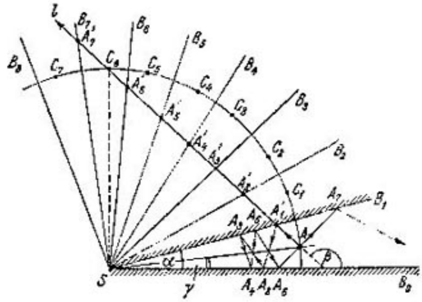

FIG. 122

se encuentran en una misma recta (suponemos aquí $m=0, 1, 2, \ldots$). Observemos que $\triangle A'_mSA'_{m+1}=\triangle A_mSA_{m+1}$, en virtud de lo cual

$$\angle A'_mA'_{m+1}S=\angle A_mA_{m+1}S.$$

Análogamente $\triangle A'_{m+1}SA'_{m+2}=\triangle A_{m+1}SA_{m+2}$ y, por consiguiente,

$$\angle SA'_{m+1}A'_{m+2}=\angle SA_{m+1}A_{m+2}.$$

Pero, por la ley de reflexión (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión).

$$\angle SA_{m+1}A_{m+2}=\angle A_mA_{m+1}B.$$

Por consiguiente,

$$\angle A'_mA'_{m+1}S+\angle SA'_{m+1}A'_{m+2}=\angle A_mA_{m+1}S+\angle A_mA_{m+1}B=\pi.$$

De este modo, el trayecto del rayo, la quebrada AA_1A_2 ..., ha resultado desarrollado en la recta $l\,(AA'_1A'_2)$. Puesto que esta recta puede cruzar solamente un número finito de lados SB_m, por consiguiente, el número de reflexiones del rayo es finito.

Está claro que si SB_n es el último lado que corta la recta l, entonces $n\alpha<\beta$, y $(n+1)\alpha\geqslant\beta$. Así pues, el número de reflexiones es igual a un tal número entero n que satisface a las desigualdades

$$n<\frac{\beta}{\alpha}\leqslant n+1.$$

Para aclarar las condiciones con las cuales el rayo, despues de cierta cantadad de reflexiones, pasará de nuevo por el punto A, construyamos una serie de puntos C_1, C_2, ... de manera que el punto C_1 sea simétrico al punto A respecto del lado SB_1, el punto C_2 sea simétrico al C_1 respecto del lado SB_2, etc., en general, de modo que el punto C_m sea simétrico al punto C_{m-1} respecto del lado SB_m. Es evidente que el hecho de que el rayo pase de nuevo por el punto A es equivalente a que pase la recta l por uno de los puntos C_m ($m=1, 2, \ldots$).

Para formular analíticamente esta condición introduzcamos el ángulo $\gamma = \angle ASB_0$ y distinguiremos dos casos:

a) el punto C_k por el que pasa la recta l es tal, que k es un número par;

b) el punto C_k es tal, que k es un número impar.

En el caso a) (este caso está representado en la fig. 122, donde $k=6$) $\angle ASC_k = k\alpha$. Puesto que $\triangle ASC_k$ es isósceles, entonces

$$\angle SAC_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\alpha}{2}.$$

Por otro lado, el mismo ángulo es igual a $\gamma + \pi - \beta$, por consiguiente,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{k\alpha}{2} = \gamma + \pi - \beta,$$

de donde,

$$k = \frac{2\beta - 2\gamma - \pi}{\alpha}. \tag{1}$$

En el caso b) tendremos que

$$\angle ASC_k = (k+1)\alpha - 2\gamma$$

y, como anteriormente, obtendremos la relación

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(k+1)\alpha - 2\gamma}{2} = \gamma + \pi - \beta,$$

de donde

$$k+1 = \frac{2\beta - \pi}{\alpha}. \tag{2}$$

Si razonamos a la inversa, nos convenceremos fácilmente de que el cumplimiento de una de las relaciones (1) y (2), para un valor entero de k, conduce a que la recta l pase por el punto C_k. Por consiguiente, el rayo pasará de nuevo por el punto A cuando, y sólo cuando, (1) o (2) sea un número entero par.

4. Lugar geométrico de los puntos

409. El lugar geométrico buscado está compuesto por dos arcos de circunferencias: el arco BE con su centro en el punto medio C del arco AB de la circunferencia dada y el arco BF con centro en el punto medio del segundo arco AB de la circunferencia dada, con la particularidad de que EAF es tangente en el punto A a la circunferencia dada (fig. 123).

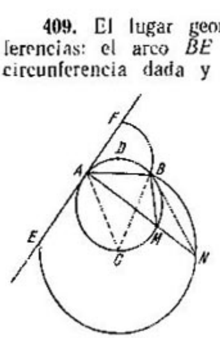

FIG. 123

Demostración. Sea N un punto del lugar geométrico buscado, obtenido con ayuda del punto M tomado en el arco inferior AB. Según la construcción el triángulo NMB es isósceles y, por lo tanto,

$$\angle BNA = \frac{1}{2}\angle BMA = \frac{1}{2}\angle BCA.$$

Por consiguiente, el punto N se encuentra en la circunferencia de centro C que pasa por los puntos A y B. Luego, el punto N deberá encontrarse dentro del ángulo BAE, es decir, se encuentra en el arco BE de la circunferencia de centro C. Al contrario, si N se encuentra en este arco, entonces

$$\angle BNA = \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BMA.$$

de donde se desprende que $\angle BNA = \angle NBM$ y que el $\triangle NMB$ es isósceles. Así pues, el punto N se obtiene de la construcción indicada. De análoga forma se efectúa la demostración en el caso cuando el punto M se encuentre en el arco superior AB.

410. El lugar geométrico buscado se compone de dos rectas l y k dispuestas simétricamente con respecto de la perpendicular común BB' a las rectas paralelas dadas trazada a través del punto O. La recta l pasa por el punto C perpendicularmente a OC, además, $B'C = OB$ (fig. 124).

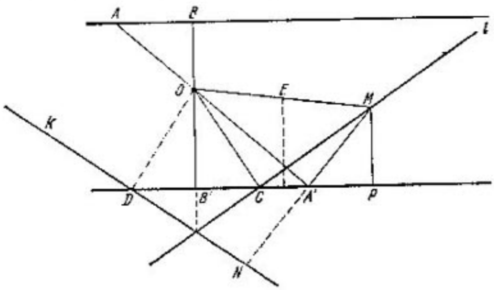

FIG 124

Demostración. Sean M y N los puntos obtenidos durante la construcción con ayuda de la secante AA'. La demostración se lleva a cabo solamente para el punto M (para el punto N se realiza análogamente). Sea $MP \perp B'C$, entonces, $\angle OAB = \angle A'MP$ (como ángulos con lados perpendiculares). Por esta razón, los triángulos rectángulos OAB y $A'MP$ con iguales hipotenusas OA y $A'M$, son iguales. Por consiguiente, $A'P = OB = B'C$. De aquí se desprende que si E es el punto medio de OM, entonces, los puntos M, A', C y O se encuentran en una circunferencia con centro en el punto E y, por consiguiente, $MC \perp OC$, es decir, el punto M se encuentra en la recta l. Al contrario, si M es un punto de la recta l y el ángulo $MA'O$ es recto, entonces $A'P = B'C = OB$, de donde se deriva la igualdad de los triángulos OAB y $A'MP$ y, por fin, la igualdad $OA = A'M$. Por consiguiente, el punto M se obtiene de la construcción examinada.

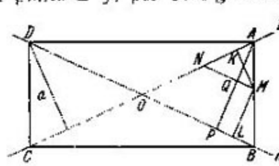

FIG. 125

411. En el caso de rectas que *se cruzan*, el lugar geométrico buscado se compone de cuatro segmentos que forman el rectángulo $ABCD$, cuyos vértices se encuentran en las rectas dadas l y m y a una distancia de éstas igual a la distancia dada a (fig. 125).

Demostración. Sea el punto M tal, que $MK \perp l$, $ML \perp m$ y $MK + ML = a$, donde a es la longitud del segmento dado. Tracemos por el punto M la recta AB de tal manera que $OA = OB$, y $MN \| OB$. Sea $AP \perp OB$ y Q el punto de intersección de AP con MN. De la igualdad $AN = MN$ se desprende que $MK = AQ$ y, por consiguiente,

$$AP = AQ + QP = MK + ML = a$$

Por consiguiente, el punto A es un vértice del rectángulo mencionado. Lo mismo es justo para el punto B, así que el punto M se encuentra en uno de los lados de este rectángulo. Al contrario, si M se encuentra en uno de los lados de este rectángulo, entonces, razonando a la inversa, obtendremos que $MK + ML = AP = a$.

Si las rectas dadas l y m son *paralelas* y la distancia entre ellas es igual a h, el lugar geométrico buscado existe solamente cuando $a \geqslant h$, y representa un par de rectas paralelas a las dadas para $a > h$, y toda la zona entre l y m cuando $a = h$.

412. En el caso de rectas que *se cruzan*, el lugar geométrico buscado se compone de ocho semirectas que son las prolongaciones de los lados del rectángulo $ABCD$ indicado en la resolución del problema 411 (fig. 126). La demostración es análoga a la demostración dada en el problema anterior.

Si las rectas dadas l y m son *paralelas* y la distancia entre ellas es igual a h, el lugar geométrico buscado existe solamente cuando $a \leqslant h$, y representa un par de rectas paralelas a las dadas en el caso en que $a < h$, o la parte de un plano que se encuentra fuera de la zona entre l y m, cuando $a = h$.

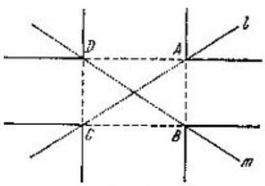

FIG. 126

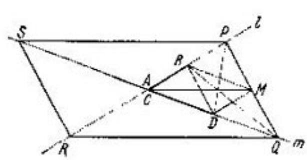

FIG. 127

413. Si el segmento AB se encuentra en la recta l y el segmento CD en la recta m, entonces, el lugar geométrico buscado se compone de cuatro segmentos que forman el paralelogramo $PQRS$, en el cual l y m son diagonales y la posición de los vértices P y Q se determina de la relación

$$h_P CD = a^2, \quad h_Q AB = a^2, \tag{1}$$

donde h_P y h_Q son las distancias desde los puntos P y Q hasta las rectas m y l (fig 127).

Demostración. Observemos que para las rectas l y m fijadas, el lugar geométrico buscado queda determinado por las longitudes de los segmentos AB y CD y la constante a, pero no depende de la disposición de estos segmentos en las rectas l y m. En efecto, al cambiar esta disposición, las áreas de los triángulos AMB y CMD no varían. Por esta razón, es suficiente examinar el caso particular cuando los segmentos AB y CD tienen un extremo común en el punto de intersección de las rectas l y m. En este caso los segmentos AB y CD serán los lados de un triángulo; el tercer lado del cual se encuentra en uno de los cuatro ángulos formados al cruzarse las rectas l y m. Por ejemplo, en la fig. 127 coinciden los extremos A y C y el tercer lado es BD.

Sea M un punto del lugar geométrico buscado, que se encuentra dentro del ángulo BAD. Entonces, el área del triángulo BMD será igual a

$$S_{BMD} = |S_{AMB} + S_{CMD} - S_{ABD}| = |a^2 - S_{ABD}|.$$

De aquí se desprende que la distancia del punto M a la recta BD no depende de su posición en la recta $PQ \parallel BD$. Para los puntos P y Q se cumplen las relaciones (1)

Al contrario, supongamos que sea M un punto cualquiera en la recta PQ, donde los puntos P y Q han sido construidos de acuerdo con (1). De las relaciones

$$\frac{AP}{AB} = \frac{S_{APD}}{S_{ABD}} = \frac{a^2}{S_{ABD}}, \quad \frac{CQ}{CD} = \frac{S_{CQB}}{S_{CDB}} = \frac{a^2}{S_{ABD}}$$

se deduce

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD},$$

es decir, $PQ \| BD$. Por eso,

$$S_{AMB}+S_{CMD}=S_{ABD}+S_{BMD}=S_{ABD}+S_{BPD}=S_{APD}=a^2$$

Por consiguiente, el punto M pertenece al lugar geométrico buscado. Los demás lados del paralelogramo $PQRS$ se obtienen de forma análoga al hacer coincidir otros extremos de los segmentos, a saber: QR si $B \equiv C$, RS cuando $B \equiv D$ y SP en el caso en que $A \equiv D$.

414. El lugar geométrico buscado es una circunferencia simétrica a la circunferencia dada K con respecto de la cuerda dada AB (fig. 128).

Demostración. Tracemos en la circunferencia K la cuerda $AD \perp AB$. Supongamos que el $\triangle ABC$ está inscrito en K y que sea M el punto de intersección de las alturas de este triángulo. Es fácil ver que $AMCD$ es un paralelogramo: $DA \| CM$ como perpendiculares a AB, y $DC \| AM$ como perpendiculares a BC ($DC \perp BC$, puesto que BD es el diámetro de K). Por esta razón, el punto M se encuentra en la circunferencia K' obtenida desplazando la circunferencia K a la distancia AD en sentido de la cuerda DA. Es evidente que esta circunferncia K' es simétrica a la K respecto a AB. Al contrario, sea M un punto en K' y $MC \perp AB$. Puesto que $MC = AD$, entonces $AMCD$ es un paralelogramo y, por lo tanto, $AM \| DC$. Pero, $DC \perp BC$, puesto que $ABCD$ está inscrito en K y el ángulo BAD es recto. Por eso $AM \perp BC$ y M es el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Por consiguiente, M pertenece al lugar geométrico buscado.

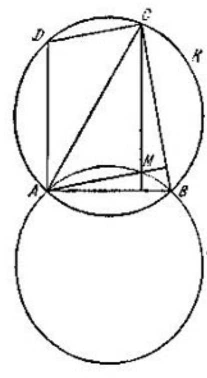

FIG. 128

415. Sea O el centro de la circunferencia dada y R su radio (fig. 129). El lugar geométrico buscado es la recta l perpendicular a la recta OA y que corta a esta recta en el punto B de manera que

$$OB = \frac{R^2}{OA}. \tag{1}$$

Demostración. Tracemos por el punto M una recta $l \perp OA$ que cortará a la recta OA en el punto B. Supongamos que sea C el punto de intersección del segmento OM con la cuerda KL. De la semejanza de los triángulos OAC y OMB se deduce:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OM}{OA},$$

de donde

$$OB = \frac{OM \cdot OC}{OA} \tag{2}$$

Según la construcción, KC es una de las alturas del triángulo rectángulo OKM, por consiguiente,

$$OM \cdot OC = R^2.$$

Sustituyendo esta expresión en (2) obtendremos la igualdad (1).

Al contrario, sea M un punto cualquiera de la recta l perpendicular a OA y tal, que OB se determina por la igualdad (1). Tracemos la tangente MK y $KC \perp OM$. Supongamos que KC corta a la recta OA en el punto A'. Entonces, repitiendo la primera parte de la demostración hallaremos que OB se determina por la fórmula (1) sustituyendo OA por OA'. De aquí obtendremos que $OA' = OA$, es decir, el punto A' coincidirá con el punto A, lo cual significa que el punto M pertenece al lugar geométrico buscado.

416. Sea

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}>1.$$

Tracemos las bisectrices MP y MQ de los dos ángulos adyacentes con el vértice M y los lados MA y MB (fig. 130). Entonces, por la propiedad de las bisectrices tendremos:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q} \text{ y } \frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}. \tag{1}$$

De aquí se desprende que la disposición de los puntos P y Q no depende de la del punto M. Puesto que, además, $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$, entonces, el punto M se en-

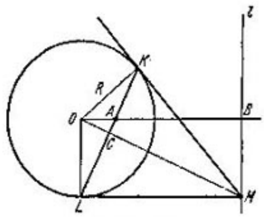

FIG. 129

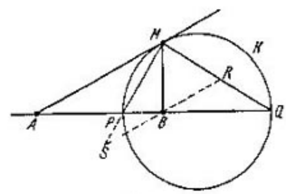

FIG. 130

cuentra en la circunferencia K de diámetro PQ. Al contrario, supongamos que los puntos P y Q se han construido de acuerdo con (1) y que K es la circunferencia de diámetro PQ. Si el punto M se encuentra en esta circunferencia, entonces $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$. Tracemos a través del punto B $RS \parallel AM$, entonces

$$\frac{AM}{BR}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}, \quad \frac{AM}{BS}=\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q}, \tag{2}$$

de donde $BR=BS$ y BM es una mediana en el triángulo RMS. Puesto que el $\triangle RMS$ es rectángulo, $BM=BR$ y, en virtud de (2),

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}.$$

Por esta razón el punto M pertenece al lugar geométrico que se examina.

Para expresar el diámetro PQ por medio de la longitud a del segmento AB, de las relaciones

$$PB=AB-AP=a-\frac{p}{q}PB,$$

$$BQ=AQ-AB=\frac{p}{q}BQ-a,$$

hallamos:

$$PB=a\frac{q}{p+q}, \quad BQ=a\frac{q}{p-q},$$

de donde

$$PQ=\frac{2a}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}.$$

Si $p=q$, entonces, el lugar geométrico buscado será, evidentemente, la perpendicular a la recta AB trazada desde el punto medio del segmento AB.

417. El lugar geométrico buscado es la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio E.

Demostración. El triángulo ADB es isósceles, ya que $\angle CAD=\angle CBD$, como ángulos que abarcan iguales arcos CD en iguales circunferencias (fig. 131). Por esta razón, el punto D se encuentra en la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio E. Al contrario, si tomamos cualquier punto D en esta perpendicular, que no coincida con el punto E, entonces las circunferencias que pasan por ACD y BCD son iguales. Esto se desprende, por ejemplo, de las igualdades

$$R_1=\frac{CD}{2\operatorname{sen}\alpha}=\frac{CD}{2\operatorname{sen}\beta}=R_2,$$

donde $\alpha=\angle BAD$ y $\beta=\angle CBD$.

418. El lugar geométrico buscado es una recta trazada por dos posiciones cualesquiera del último vértice.

Demostración. Sea, por ejemplo, $A_1B_1C_1D_1E_1$ una de las posiciones del polígono deformable y $A_2B_2C_2D_2E_2$ otra de ellas. Los vértices A, B, C y D de este polígono se deslizan respectivamente por las rectas l_A, l_B, l_C y l_D (fig. 132). Tracemos la recta l por las posiciones E_1 y E_2 del último vértice.

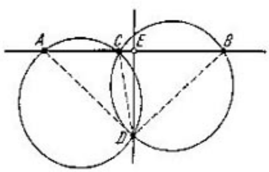

FIG. 131

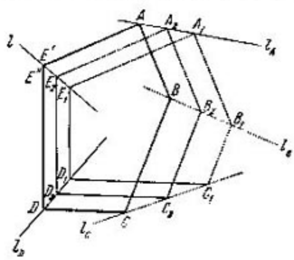

FIG 132

Supongamos que el vértice en la recta l_A ocupó la posición A, y en la recta l_D, la posición D. El lado paralelo a A_2E_2 cortará a l en el punto E', y el lado paralelo a D_2E_2, en el punto E''. Según la construcción

$$\frac{E'E_2}{E_2E_1}=\frac{AA_2}{A_2A_1}=\frac{BB_2}{B_2B_1}=\frac{CC_2}{C_2C_1}=\frac{DD_2}{D_2D_1}=\frac{E''E_2}{E_2E_1},$$

de donde

$$E'E_2=E''E_2,$$

es decir, los puntos E' y E'' coinciden. Esto significa que el último vértice se hallará sobre la recta l en el punto $E\equiv E'\equiv E''$.

Lo inverso es evidente, puesto que la posición del polígono deformable puede ser construida comenzando desde cualquier punto E en la recta l.

419. El lugar geométrico buscado es una circunferencia que pasa por los extremos de la cuerda AB y uno de los puntos M_1 obtenidos de la construcción indicada en las condiciones del problema.

Demostración. Introduzcamos previamente algunas denotaciones. Existirá una, y sólo una, posición C_1D_1 de la cuerda CD en la que $C_1D_1 \parallel AB$ y cuando en la circunferencia dada K se puede elegir tal dirección de giro ν, al moverse en la cual los extremos de las cuerdas se encontrarán en la sucesión A, B, C_1 y D_1 (esta elección puede ser indeterminada solamente en el caso de la igualdad $AB=CD$, cuando las rectas AC y BD son paralelas). Designemos por α la cuerda AB de la circunferencia dada K, sobre la que se hallan los puntos C_1 y D_1, por β, otra cuerda AB y por γ, aquella de las cuerdas C_1D_1 sobre la que no se hallan los puntos A y B. A continuación, anotemos con M_1 el punto de intersección de las rectas AC_1 y BD_1. El punto M_1 se encuentra dentro de K. Sea K_1 la circunferencia circunscrita al $\triangle ABM_1$ (fig. 133). Demostremos que, cualquiera que sea la posición de la cuerda CD, el punto de intersección de las rectas AC y BD se encontrará sobre K_1.

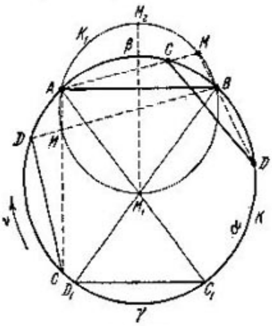

FIG 133

Mientras ambos puntos C y D se encuentren sobre el arco α, el punto M se encontrará dentro de K y, entonces,

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\beta+\gamma). \qquad (1)$$

Si por lo menos uno de los puntos C y D resulta en el arco β, entonces el punto M será exterior a K y

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma). \qquad (2)$$

En el primer caso M se encuentra sobre el arco AM_1B de la circunferencia K_1, puesto que de acuerdo con (1) el $\angle AMB$ no depende de la posición de CD y, por consiguiente, es igual al $\angle AM_1B$. En el segundo caso, debido a que la suma de los miembros derechos de (1) y (2) es igual a

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi,$$

el punto M se encuentra en el arco AB de la circunferencia K_1, exterior a K.

Es evidente que es justo también lo inverso, es decir, que cualquier punto M de la circunferencia K_1 puede ser obtenido eligiendo adecuadamente la posición de la cuerda CD.

420. Designemos la circunferencia dada por O y la recta dada por L (fig. 134). Sea M el segundo punto de intersección de la recta PQ con O. Tomemos una circunferencia cualquiera O_1 que pasa por los puntos P y Q y que corta por segunda vez a la circunferencia O en el punto R y a la recta L en el punto S. Sea N el segundo punto de intersección de la recta RS con la circunferencia O.

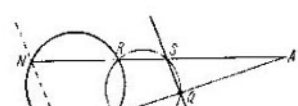

FIG. 134

Demostremos que $MN \| L$. Con este fin, apliquemos el siguiente conocido teorema de la planimetría: si se conocen una circunferencia y un punto A, entonces, para cualquier recta que pasa por A y que corta a esta circunferencia en los puntos A_1 y A_2, el producto de los segmentos $AA_1 \cdot AA_2$ es una magnitud constante que no depende de la elección de la recta.

Designemos por A el punto de intersección de las rectas PQ y RS. Al principio apliquemos el teorema mencionado a la circunferencia O, al punto A y a las rectas AP y AR. Puesto que AP corta por segunda vez a O en el punto M, y a AR en el punto N, entonces

$$AM\cdot AP=AN\cdot AR \qquad (1)$$

Apliquemos, ahora, el mismo teorema a la circunferencia O_1, al punto A y a las mismas rectas. Puesto que AP corta por segunda vez a la circunferencia O_1 en el punto Q, y a AR en el punto S, entonces

$$AQ \cdot AP = AS \cdot AR. \tag{2}$$

De (1) y (2) se desprende la igualdad

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AQ}{AS} \tag{3}$$

De la igualdad (3), en virtud del teorema inverso al teorema sobre la proporcionalidad de los segmentos cortados por rectas paralelas en los lados de un ángulo, se deriva que $MN \parallel QS$, lo que era necesario demostrar.

De este modo, para cualquier circunferencia tipo O_1, el punto N puede determinarse como el segundo punto de intersección de la recta que pasa por M y que es paralela a L, con la circunferencia O. Esta construcción determina un mismo valor del punto N independientemente de la elección de la circunferencia O_1. Por consiguiente, todas las rectas posibles RS obtenidas para diferentes circunferencias O_1 cortan a la circunferencia O en el punto N.

Los casos excepcionales cuando de (1) y (2) no se deriva (3), por ejemplo, cuando coinciden los puntos R y P o los Q y S, o cuando $PQ \parallel RS$, pueden ser examinados como límites para el caso general y se pueden emplear los razonamientos de continuidad.

5. Determinación de los valores máximos y mínimos

421. Si A es el vértice del ángulo recto del $\triangle ABC$ y C y B se encuentran sobre las rectas paralelas dadas l_1 y l_2 (fig. 135), entonces

$$AB = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi}, \quad BC = \frac{b}{\cos \varphi}$$

Por consiguiente, el área del triángulo ABC será igual a

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{ab}{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

De aquí se desprende que S_{ABC} tendrá su valor mínimo igual a ab, cuando $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

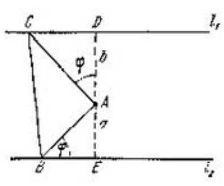

FIG. 135

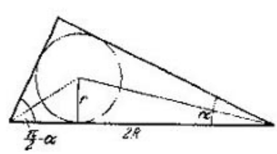

FIG. 136

422. Si R es el radio de la circunferencia circunscrita y r el de la inscrita (fig. 136), entonces

$$2R = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Cbservando que

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1},$$

obtenemos:

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}.$$

La magnitud $\frac{R}{r}$ tiene valor mínimo cuando $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1$, es decir, (en virtud de la limitación $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) cuando $\alpha=\frac{\pi}{4}$; en este caso

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

423. Supongamos que del rectángulo $ABCD$ cortamos un triángulo con el vértice C, de tal manera que se obtenga el pentágono $ABEFD$ (fig. 137). Está claro, que el rectángulo buscado $AB_1C_1D_1$ deberá tener el vértice C_1 sobre el segmento EF. El problema consiste en hallar la posición de este vértice.

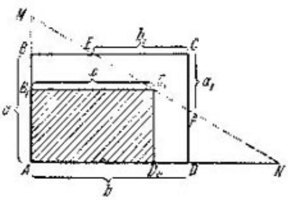

FIG. 137

Para hallar el punto C_1, prolongamos los lados AB y AD del rectángulo hasta su intersección con la prolongación del segmento EF, formando el triángulo AMN. Sea

$$AM=m,\quad AN=n$$

y

$$B_1C_1=AD_1=x.$$

De la semejanza de los triángulos AMN y D_1C_1N tenemos.

$$\frac{C_1D_1}{m}=\frac{n-x}{n},$$

de donde

$$C_1D_1=\frac{m}{n}(n-x)$$

Por consiguiente, para el área S del rectángulo $AB_1C_1D_1$, igual a $AD_1\cdot C_1D_1$, obtenemos la expresión

$$S=\frac{m}{n}(n-x)x.$$

Transformando esta expresión a la forma

$$S=\frac{m}{n}\left[\frac{n^2}{4}-\left(\frac{n}{2}-x\right)^2\right],\qquad (1)$$

deducimos que S tendrá su valor máximo cuando $\frac{n}{2}-x=0$, es decir, cuando $x=\frac{n}{2}$. Designemos por C_0 la posición del vértice C_1, correspondiente a $x=\frac{n}{2}$.

Observando que la expresión (1) para S decrece al aumentar $\left|\frac{n}{2}-x\right|$, es decir, al moverse el punto C_1 desde el punto C_0 hacia el vertice M o hacia el vértice F, hallamos que son posibles los tres casos siguientes:

1) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento EF; en este caso, el vértice C_1 del rectángulo buscado coincide con C_0.

2) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento ME; entonces, C_1 debe tomarse coincidente con E.

3) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento FN; en este caso, el punto C_1 debe tomarse coincidente con F.

Queda hallar el criterio para distinguir estos casos con ayuda de las magnitudes a, a_1, b y b_1 dadas en las condiciones del problema.

Primeramente hallemos la magnitud n. De la semejanza de los triángulos ECF y NDF tenemos:

$$\frac{n-b}{a-a_1}=\frac{b_1}{a_1},$$

de donde

$$n=b+\frac{b_1}{a_1}(a-a_1). \tag{2}$$

Observemos, ahora, que el punto C_0 resultará dentro del segmento EF si se cumplen las desigualdades

$$b-b_1 < x < b.$$

Sustituyendo aquí $x=\frac{n}{2}$, con el valor conocido de n, obtendremos:

$$b-b_1 < \frac{b}{2}+\frac{b_1}{2a_1}(a-a_1) < b.$$

Estas desigualdades se pueden transformar fácilmente a la forma

$$-1 < \frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1} < 1 \tag{3}$$

Si no se observa la desigualdad izquierda, el punto C_0 resultará en el segmento ME, y si no se cumple la desigualdad derecha sobre el segmento FN.

Definitivamente se obtiene el siguiente resultado: si para los datos a, b, a_1 y b_1 se cumplen las dos desigualdades (3), entonces el vértice C_1 del rectángulo de área máxima se encuentra dentro de los límites del segmento EF y el lado x de este rectángulo se calcula por la fórmula

$$x=\frac{b}{2}+\frac{b}{2a_1}(a-a_1),$$

si no se cumple la desigualdad izquierda de (3), el vértice C_1 coincide con el punto E, y si no se cumple la derecha, con el punto F.

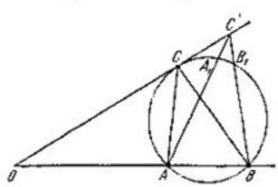

FIG. 138

424. Describamos una circunferencia que pase por los puntos A y B y que haga contacto con el segundo lado del ángulo (fig. 138). El punto de tangencia será el punto buscado, puesto que para cualquier punto C' perteneciente a esta recta el ángulo $AC'B$ se mide por la semidiferencia de los arcos AB y A_1B_1, mientras que el $\angle ACB$ se mide por la mitad del arco AB.

Observemos, a continuación, que $(OC)^2 = OB \cdot OA$. Por consiguiente, el problema se reduce a la construcción conocida de la media aritmética de las longitudes de los segmentos dados OA y OB.

425. Analicemos tres casos posibles de disposición del segmento AB respecto a l.

a) $AB \parallel l$. Para cualquier punto M de la recta l tenemos que $|AM - BM| \geq 0$, además, existe un punto M_0 para el cual $|AM_0 - BM_0| = 0$.

Este punto es el pie de la perpendicular bajada desde el punto medio del segmento AB a la recta l. El punto M para el cual la magnitud $|AM - BM|$ tendría su valor máximo, no existe. Esto se desprende de que $|AM - BM| \leqslant AB$ y la igualdad es posible solamente en el caso cuando A, B y M se encuentran sobre una misma recta.

b) $AB \perp l$. Puesto que $|AM - BM| \leqslant AB$, entonces, para el punto de intersección de la recta l con la recta AB, la magnitud $|AM - BM|$ tiene su valor máximo igual a la longitud de AB. El punto M para el cual la magnitud $|AM - BM|$ sería mínima, no existe.

c) La recta AB no es paralela y no es perpendicular a l. Es evidente que $|AM - BM|$ adquirirá su valor mínimo si M es el punto de intersección de la recta l con la perpendicular al punto medio del segmento AB. La magnitud $|AM - BM|$ tendrá su valor máximo cuando el punto M sea el punto de intersección de AB con l.

426. Sea MN una posición cualquiera de la secante, $AP \parallel ON$ y $AQ \parallel OM$ (fig. 139).

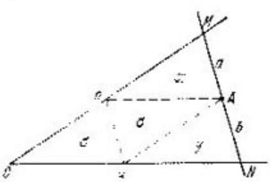

FIG. 139

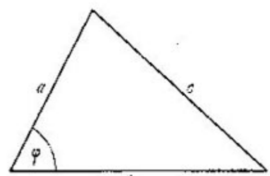

FIG. 140

Introduzcamos las siguientes denotaciones

$x =$ área $\triangle APM$,
$y =$ área $\triangle AQN$,
$\sigma =$ área $\triangle APQ$,
$S =$ área $\triangle OMN$,
$a = AM$,
$b = AN$.

Tenemos:

$$S = 2\sigma + x + y$$

Es evidente que

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a}{b} \qquad \frac{y}{\sigma} = \frac{b}{a}$$

Por consiguiente,

$$S = \sigma\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 4\sigma + \sigma\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

El valor mínimo $S = 4\sigma$ se obtiene para $a = b$, lo que era necesario demostrar.

427. Sea $a+b=q$ (fig. 140). De acuerdo con el teorema de los cosenos

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi = a^2+(q-a)^2-2a(q-a)\cos\varphi =$$
$$= q^2+2a^2(1+\cos\varphi)-2aq(1+\cos\varphi) = q^2\frac{1-\cos\varphi}{2}+2(1+\cos\varphi)\left(a-\frac{q}{2}\right)^2$$

Puesto que q y φ son invariables, el valor mínimo de c será cuando $a=\frac{q}{2}=$ $=\frac{a+b}{2}$, es decir, cuando sea $a=b$.

428. **Primera resolución.** Examinemos el $\triangle ABC$ con base AC y designemos por a, b y c las longitudes de los lados opuestos respectivamente a los ángulos A, B y C; hagamos $a+b+c=p$.

De las relaciones

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen}(A+B)}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

hallamos:

$$p=b+b\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}+b\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} B}=b\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\operatorname{sen}\left(A+\frac{B}{2}\right).$$

Puesto que $b>0$ y $\operatorname{sen}\frac{B}{2}>0$, entonces, p tendrá su valor máximo cuando sea

$$A+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

En este caso $A=C$ y el $\triangle ABC$ es isósceles.

Segunda resolución. Tracemos con la base dada AB como cuerda un segmento que abarque el ángulo dado φ (fig. 141) y examinemos los dos triángulos inscritos en este segmento: el triángulo isósceles ADB y el no isósceles ACB.

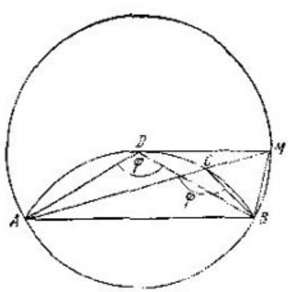

FIG. 141

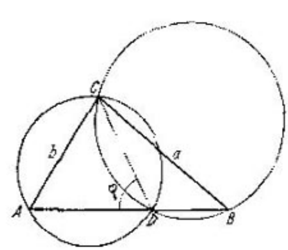

FIG. 142

Desde el punto D describamos una circunferencia de radio $AD=DB$, prolonguemos AC hasta su intersección con la circunferencia en el punto M y unamos el punto M con los puntos D y B. Obtendremos:

$$AD+DB=AD+DM>AM=AC+CM$$

Pero en el triángulo BCM

$$\angle CBM=\angle ACB-\angle CMB=\angle CMB,$$

puesto que $\angle ACB=\angle ADB$ y se mide por el arco AB, mientras que el $\angle AMB$ se mide por la mitad del arco AB. Por consiguiente, $CM=CB$ y $AD+DB>AC+CB$.

429. Designemos por R_1 y R_2 los radios de las circunferencias circunscritas respectivamente a los triángulos ACD y BCD, y hagamos $\angle ADC = \varphi$, $AC = b$ y $BC = a$ (fig. 142). Tenemos:

$$2R_1 = \frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}, \qquad 2R_2 = \frac{a}{\operatorname{sen}(\pi-\varphi)} = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

De aquí $\frac{R_1}{R_2} = \frac{b}{a}$. Los radios R_1 y R_2 serán los mínimos cuando sea $\varphi = \frac{\pi}{2}$; en este caso D será el pie de la altura CD.

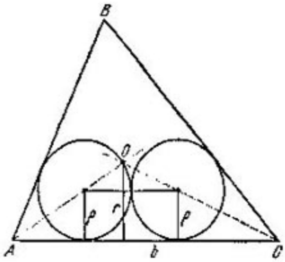

FIG. 143

430. Cada una de las circunferencias cortadas deberá hacer contacto con dos de los lados del $\triangle ABC$ (véase la fig. 143), además, las circunferencias deberán tener contacto una con la otra. En el caso contrario el radio puede ser aumentado. Por esta razón, los centros de las circunferencias se encuentran en dos bisectrices de los ángulos internos, por ejemplo, en las AO y CO, donde O es el centro de la circunferencia inscrita al $\triangle ABC$. Si r es el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$ y ρ es el radio de las circunferencias cortadas, entonces, del $\triangle AOC$ tenemos que

$$\frac{r-\rho}{2\rho} = \frac{r}{b},$$

de donde hallamos que

$$\frac{\rho}{r} = \frac{b}{b+2r} = 1 - \frac{2r}{b+2r}.$$

De esta fórmula se desprende que ρ sera maximo cuando como b se toma el lado mayor.

B. ESTEREOMETRIA

1. Problemas de cálculo

431. Sea a el lado de la base, d la diagonal de la cara lateral del prisma y l la arista lateral (fig. 144). Tenemos

$$v = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\, l.$$

Del $\triangle A_1BC_1$ se desprende que $\frac{1}{2}a = d \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Por eso

$$l = \sqrt{d^2 - a^2} = \frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$v = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}},$$

de donde

$$a=\sqrt[3]{\frac{8v\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}}\,.$$

432. Sea H la altura de la pirámide y a la longitud del lado de la base. Examinando los triangulos semejantes OMS y ABS (fig 145) hallaremos

$$\frac{h}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}{H}\,. \qquad (1)$$

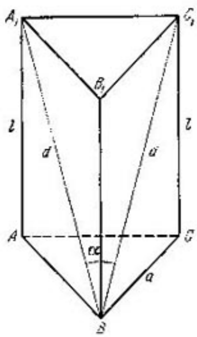

FIG. 144

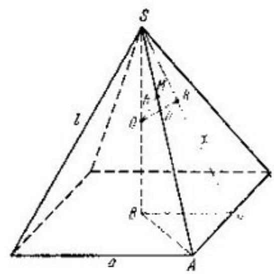

FIG. 145

Análogamente, de los triángulos OKS y CBS obtendremos.

$$\frac{b}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-b^2}}{H}\,. \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro la igualdad (1) por la (2) tendremos:

$$\sqrt{\frac{H^2-4h^2}{H^2-4b^2}}=\frac{h}{b\sqrt{2}}\,,$$

de donde

$$H=\frac{2bh}{\sqrt{2b^2-h^2}}\,.$$

Colocando esta expresión en (1), hallaremos fácilmente que

$$a^2=\frac{8b^2h^2}{h^2-b^2}.$$

En resumen, para el volumen V obtenemos la siguiente expresión:

$$V=\frac{16}{3}\,\frac{b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$$

433. Sea H la altura de la pirámide, x la altura de la cara lateral, trazada desde el vértice de la pirámide, R el radio de la circunferencia inscrita en la base, r el radio de la circunferencia circunscrita a la base y a el lado de la base. De la semejanza de los triángulos CA_1B_1 y CAB (fig. 146) obtenemos:

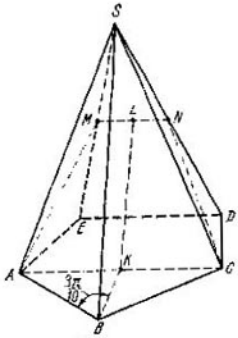

FIG 146

$$\frac{H-h}{H}=\frac{R}{r},$$

de donde

$$H=\frac{hr}{r-R}.$$

Pero, del $\triangle\ ADB$ tenemos que

$$r=\frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

y, por lo tanto,

$$H=\frac{h}{1-\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Puesto que para el área de la base y el volumen tenemos las siguientes fórmulas

$$S_{\text{base}}=n\,\frac{1}{2}\,r^2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\quad \text{y}\quad V=\frac{1}{3}\,S_{\text{base}}H,$$

entonces,

$$r^2=\frac{6V}{Hn\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}}$$

Colocando aquí el valor hallado de H, hallamos

$$r=\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}}}.$$

Puesto que $x=\sqrt{R^2+H^2}$ y $\frac{a}{2}=r\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$, la superficie lateral es igual a

$$n\,\frac{1}{2}\,xa=nr\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2+H^2},$$

o, definitivamente

$$S_{\text{lat}}=n\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{3V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\,\text{tg}\,\frac{\pi}{n}}+\frac{h^2}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\right]}.$$

434. Sean M y N los puntos medios de las aristas ES y DS (fig. 147); es fácil ver que $AMNC$ es un trapecio, ya que $MN \parallel ED$ y $ED \parallel AC$. Es evidente también que

$$MN = \frac{1}{2} q.$$

Haciendo uso de la fórmula (1) para el cuadrado de la mediana de un triángulo en la resolución del problema 370, hallaremos:

$$CN = \frac{\sqrt{b^2+2q^2}}{2}.$$

Luego,

$$KC = \frac{AC}{2} = q \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10},$$

puesto que $\angle ABK = \frac{3\pi}{10}$. Si KL es el segmento que une los puntos medios de la base del trapecio $ACNM$, entonces

$$KL = \sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4} - \left(q \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} - \frac{q}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4} - q^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2+3q^2}}{4}$$

$\left(\text{aquí aprovechamos que } \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$. Así pues, el área buscada será igual a

$$S_{\text{sec}} = \frac{1}{2}(MN + AC)\, KL = \frac{q}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{4b^2+3q^2}$$

435. Sean E y F los puntos medios de las aristas de la pirámide regular triangular $SABC$ y D el punto medio del segmento EF (fig. 148). Dado que

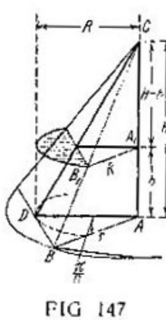

FIG. 147

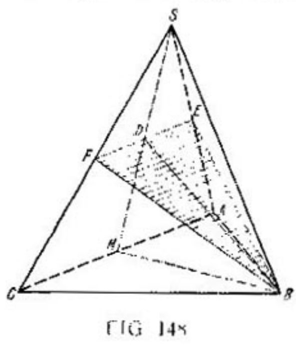

FIG. 148

la sección es perpendicular a la cara CSA, entonces, el $\angle SDB$ es recto. Prolongando SD hasta su intersección con la recta AC en el punto M, examinemos el triángulo MBS. El punto D, obviamente, divide al segmento SM por la mitad. Puesto que, además, $BD \perp MS$, entonces, el triángulo MBS es isósceles; $SB = MB$. Supongamos que el lado de base de la pirámide es igual a a. Entonces,

$$SB = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

La altura de la cara lateral es

$$SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Por eso

$$S_{lat}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4},$$

y, puesto que el área de la base es igual a

$$S_{base}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

entonces

$$\frac{S_{lat}}{S_{base}}=\sqrt{6}.$$

436. Sea a la longitud del lado del cuadrado que se encuentra en la base del prisma, l la longitud de la arista lateral del prisma y d la diagonal de la cara lateral (fig. 149). Designemos por S_{sec} el área de la sección; se ve fácilmente que la superficie total del prisma será igual a $4(S-S_{sec})$; por eso, es suficiente determinar S_{sec}. Tenemos

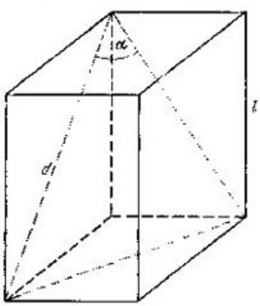

FIG. 149

$$S_{sec}=\frac{1}{2}d^2\operatorname{sen}\alpha;\quad a=d\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

$$l=\sqrt{d^2-a^2}=a\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=d\sqrt{\cos\alpha}.$$

Luego,

$$S=S_{sec}+\frac{a^2}{2}+2\frac{la}{2}=$$

$$=d^2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right).$$

De aquí

$$d^2=\frac{2S}{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$$

y, por consiguiente,

$$S_{sec}=\frac{S\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

En conclusión, después de las correspondientes simplificaciones, hallamos que la superficie total del prisma es igual a

$$S_{tot\ pris}=4(S-S_{sec})=4S\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}.$$

437. El lado de la base de la pirámide es igual a $a = 2r \operatorname{sen} \alpha$ (por el lema conocido al teorema de los senos). La arista lateral (fig. 150) es

$$l = \frac{a}{2} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

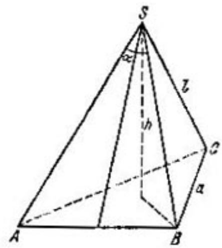

FIG. 150

Por esta razón, la altura de la pirámide será

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2r \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{3}},$$

y, por consiguiente, el volumen de la pirámide será igual a

$$V = \frac{1}{3} h \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

438. Sea $ABC'D'$ la sección indicada de la pirámide $OABCD$. Tracemos el plano auxiliar OPN a través del vértice O de la pirámide y los puntos medios de sus aristas AB y CD (fig. 151).

Es fácil ver que el plano OPN es perpendicular a AB y CD, y que los segmentos OP y ON son iguales.

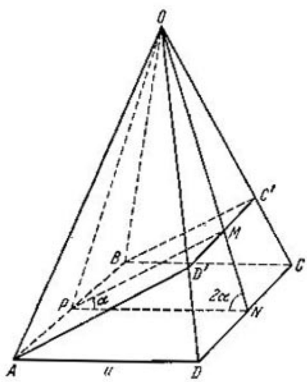

FIG. 151

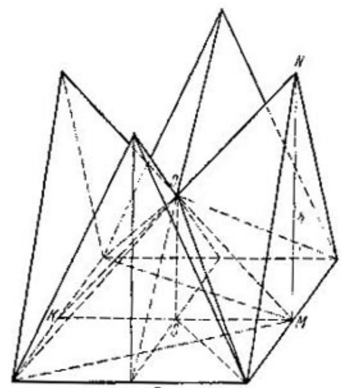

FIG. 152

Aplicando el teorema de los senos al triángulo OPM, hallamos.

$$\frac{OM}{OP} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Puesto que $D'C' \parallel DC$, entonces

$$D'C' = DC \frac{OM}{ON} = a \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo PMN, hallamos que

$$\frac{PM}{PN} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} (\pi - 3\alpha)},$$

de donde

$$PM = a \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Ahora, obtenemos el área buscada de la sección $ABC'D'$:

$$S=\frac{1}{2}(AB+D'C')\,PM=\frac{1}{2}\left(a+a\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}\right)a\,\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}=a^2\,\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 3\alpha}$$

439. Empleando las denotaciones de la fig. 152, examinemos $\frac{1}{8}$ parte del desván $OSBMN$. Esta parte consta de dos pirámides. La primera pirámide tiene como base SBM y su vértice es O; su volumen es

$$V_1=\frac{1}{3}\,SO\cdot S_{SBM}=\frac{a^2h}{48}.$$

La segunda pirámide tiene como base BMN y su vértice es O, su volumen será

$$V_2=\frac{a^2h}{24}.$$

Así pues, el volumen del desván es igual a

$$V=8\,(V_1+V_2)=\frac{a^2h}{2}.$$

440. Sean BM y CM las perpendiculares trazadas desde los vértices B y C de la base (fig. 153) a la arista lateral SA. El ángulo BMC formado por estas

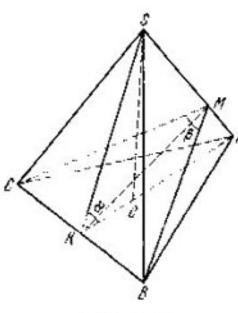

FIG. 153

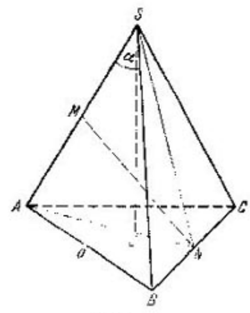

FIG. 154

perpendiculares es el buscado. Designémoslo por β. Es obvio, que

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\frac{BK}{BM} \qquad (1)$$

Sea a el lado de la base de la pirámide. Entonces

$$SK=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$$

$$SB=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{6\cos\alpha}\sqrt{3\,(1+3\cos^2\alpha)}$$

Del triángulo isósceles ASB hallamos fácilmente su altura BM

$$BM=\frac{a}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

De este modo, en virtud de (1)

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+3\cos^2\alpha}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$\beta=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

441. Tracemos un plano por la arista SA y el punto N del pie de la perpendicular AN al segmento BC (fig. 154). Sea NM la altura del triángulo ASN. El segmento NM, por ser perpendicular a AS y BC, evidentemente, es igual a d. Designemos por a el lado de la base de la pirámide. Entonces

$$SA=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

y la altura de la pirámide es igual a

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{a}{6\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Puesto que $AN\cdot SO=AS\cdot d$, entonces

$$a=\frac{6d}{\sqrt{3}\sqrt{9-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Como resultado, tenemos:

$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}SO=\frac{d^3}{3\left(3-4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}.$$

442. Sea $AD=a$, $BC=b$ (fig. 155). Tracemos el segmento EF que une los puntos medios de las bases del trapecio. Es evidente, que el ángulo diedro adyacente a AD es menor que el ángulo adyacente a BC. Sea $\angle SEO=\alpha$; entonces $\angle SFO=2\alpha$.

Tenemos:

$$SO=OF\cdot\operatorname{tg}2\alpha=OE\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Pero,

$$OF=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\qquad OE=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

y obtenemos la ecuación $a\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, resolviendo la cual, hallaremos.

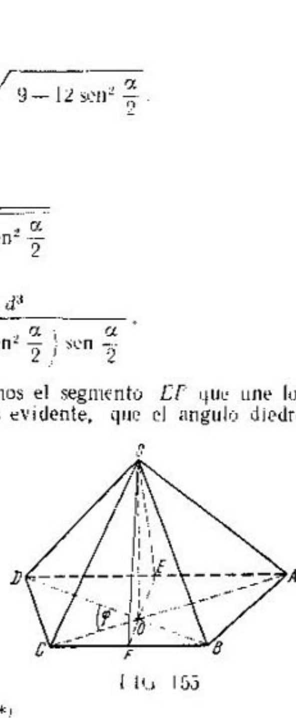

Fig. 155

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a-2b}{a}}\,^{*)}.$$

Luego, obtenemos:

$$SO=OE\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-2b}{a}},$$

$$S_{\text{base}}=\frac{a+b}{2}(OE+OF)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

*) Este resultado demuestra que siendo $a\leqslant 2b$ el problema no tiene sentido.

y, por fin, el volumen de la pirámide será igual a

$$V = \frac{(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{a(a-2b)}.$$

443. Sea $SL \perp AB$, $SK \perp AC$ y SM perpendicular al plano P (fig. 156). Según la condición del problema $SA = 25$ cm, $SL = 7$ cm y $SK = 20$ cm. Por el teorema de Pitágoras hallamos fácilmente que $AK = 15$ cm y $AL = 24$ cm. Prolonguemos el segmento KM hasta su intersección con el lado AB en el punto Q. Es fácil ver que el $\angle AQK = 30°$ por consiguiente, $AQ = 30$ cm. De aquí que sea $LQ = 6$ cm y

$$LM = 6 \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Del triángulo rectángulo SML hallamos que

$$SM = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{37} \text{ cm}.$$

444. Supongamos que sea S el vértice de la pirámide, SO su altura, $BN = NC$ (fig. 157). Designemos por a el lado de la base de la pirámide. Hagamos pro-

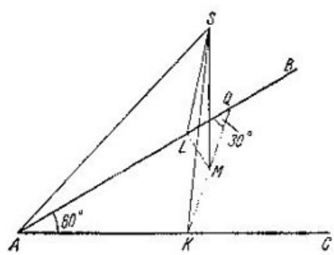

FIG. 156

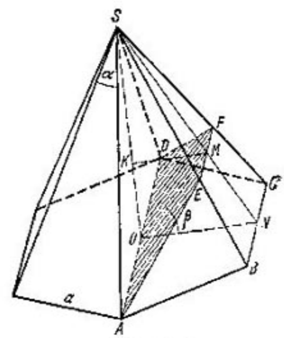

FIG. 157

visionalmente $\frac{SM}{SN} = \lambda$. Entonces, de la semejanza de los triángulos hallamos fácilmente que

$$EF = a\lambda, \quad KM = a\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,$$

y del $\triangle MKO$ obtenemos que

$$OM = \frac{KM}{\cos\beta} = \frac{a\lambda}{2\cos\beta}\sqrt{3}.$$

El área de la sección es igual a

$$\frac{1}{2}(AD + EF)\,OM = \frac{1}{2}(2a + \lambda a)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{\cos\beta}a = \frac{\sqrt{3}}{4\cos\beta}\lambda(\lambda+2)a^2.$$

El área de la base, como el área de un hexágono regular con el lado a, es igual a $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, y la relación buscada de las áreas es igual a

$$\frac{1}{6\cos\beta}\lambda(\lambda+2). \tag{2}$$

Por consiguiente, el problema se reduce a la determinación de λ. Para este fin hagamos $\angle SNO = \varphi$. Entonces, por el teorema de los senos, del $\triangle SOM$ obtendremos:

$$SM = SO \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)} = SO \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)}.$$

Puesto que $SO = SN \cdot \operatorname{sen}\varphi$, entonces

$$\lambda = \frac{SM}{SN} = \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\varphi}. \tag{3}$$

Queda determinar $\operatorname{cotg}\varphi$. Para ello, observemos que

$$SN = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}, \qquad ON = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{ON}{SO} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}}.$$

Colocando este valor en la fórmula (3), obtendremos

$$\lambda = \frac{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 3} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}.$$

445. Desde cierto punto S que no coincida con el vértice C y que se encuentre en la arista del ángulo triedro, que no es lado del ángulo plano α, bajemos las perpendiculares SB y SD a los lados del ángulo plano indicado y la perpendicular SA a la respectiva cara (fig. 158). Designemos los ángulos buscados por β_1 y γ_1

$$\angle SCB = \gamma_1, \qquad \angle SCD = \beta_1.$$

Supongamos, a continuación, que $\angle ACB = \alpha'$ y $\angle ACD = \alpha''$. Haciendo $CA = a$, de los triángulos rectángulos CBA, SBA y SBC hallamos:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{SB}{CB} = \frac{a \operatorname{sen}\alpha'}{a\cos\gamma\cos\alpha'} = \sec\gamma \operatorname{tg}\alpha'.$$

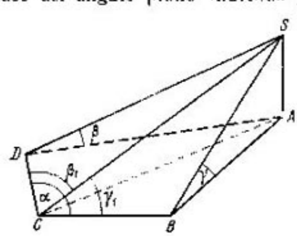

FIG. 158

Análogamente obtenemos:

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \sec\beta \operatorname{tg}\alpha''.$$

El problema se ha reducido, por consiguiente, a la determinación de $\operatorname{tg}\alpha'$ y $\operatorname{tg}\alpha''$. Tenemos que $\alpha' + \alpha'' = \alpha$. Calculando por diferentes métodos el segmento SA, hallamos:

$$SA = a \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{tg}\gamma$$
$$SA = a \operatorname{sen}\alpha'' \operatorname{tg}\beta.$$

De aquí $\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}\alpha'' \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}(\alpha - \alpha')\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = (\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma.$$

Como resultado, dividiendo ambos miembros de la última igualdad por $\cos\alpha'$, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma}.$$

Cambiando de lugar a β y γ, hallaremos:

$$\operatorname{tg}\alpha''=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}.$$

De este modo, en resumen obtenemos:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\beta_1'=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cosec}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}.$$

446. Puesto que la suma de los ángulos internos del polígono regular es igual a πn, la cantidad de lados del polígono será $n+2$. Sea PQ la altura de la pirámide (fig. 159). Examinemos una cara lateral cualquiera de la pirámide,

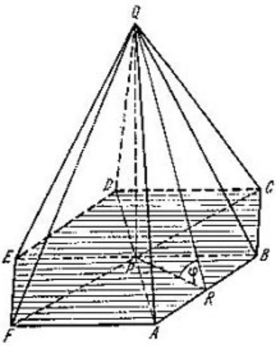

FIG. 159

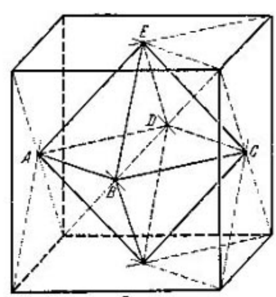

FIG. 160

por ejemplo, el $\triangle QAB$ y su proyección sobre la base, es decir, el $\triangle PAB$. De la condición del problema se deduce:

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{1}{k}.$$

Dado que las áreas de los triángulos son entre sí como sus alturas, bajadas a la base común AB, para el coseno del ángulo diedro de la base tenemos:

$$\cos\varphi=\frac{PR}{QR}=\frac{1}{k}.$$

De aquí se desprende que la apotema de la base de la pirámide es igual a

$$d=h\operatorname{cotg}\varphi=h\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

A continuación, hallamos el lado de la base

$$a=\frac{2h}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

Puesto que el área de la base es

$$S=\frac{1}{2}(n+2)\,ad,$$

entonces, el volumen de la pirámide será

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\,\frac{(n+2)\,h^3}{k^2-1}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

447. El cuerpo obtenido es un octaedro cuyos vértices se encuentran en los centros de simetría de las caras del cubo (fig. 160). El volumen del octaedro es igual al doble del volumen de la pirámide cuadrangular regular $EABCD$ de altura $\frac{a}{2}$ y el área de la base $ABCD$ de la cual es igual a $\frac{1}{2}a^2$. Por consiguiente, el volumen buscado es igual a

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3}{6}.$$

448. Es fácil ver que en la sección se obtendrá un trapecio isósceles $ABCD$ (véase la fig. 161). Sea P el punto medio del lado EF de la base de la pirámide. Examinemos el $\triangle SPR$ en el que entra la altura SO de la pirámide. El segmento KO, evidentemente, es la altura del trapecio $ABCD$. Dado que $KO \parallel SR$, entonces $KO=\frac{1}{2}h$, donde h es la apotema de la pirámide. Es obvio también, que $AB=2a$, donde a es la longitud del lado de la

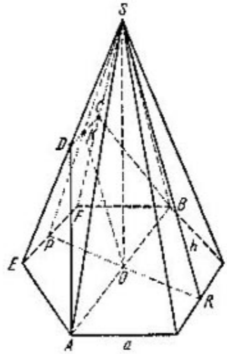

FIG. 161

base de la pirámide y que $DC=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}a$. De aquí que sea

$$S_{\text{trap}}=\frac{1}{2}\left(2a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}=\frac{5ah}{8}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}ah\right)$$

y, por consiguiente, la relación buscada es igual a $\frac{5}{4}$.

449. Sea A_1BC_1D el tetraedro dado y $ABCDA_1B_1C_1D_1$ el paralelepípedo obtenido de la construcción indicada. Es fácil comprender que las aristas del tetraedro son las diagonales de las caras laterales de paralelepípedo (fig. 162). El tetraedro puede ser obtenido eliminando del paralelepípedo cuatro pirámides equidimensionales: $ABDA_1$, $BDCC_1$, $A_1B_1C_1B$ y $A_1D_1C_1D$. Puesto que el volumen de cada pirámide es igual a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo, la relación entre el volumen V_{par} del paralelepípedo y el volumen V_{tetr} del tetraedro será

$$\frac{V_{\text{par}}}{V_{\text{tetr}}}=\frac{V_{\text{par}}}{V_{\text{par}}-\frac{4}{6}V_{\text{par}}}=3.$$

450. Es fácil ver que los vértices externos de los tetraedros se encuentran en los vértices de cierto cuadrado. Para determinar la longitud de su lado, tracemos por el vértice S de la pirámide y por el vértice externo A de uno de los tetraedros un plano perpendicular a la base de la pirámide cuadrangular (fig. 163). Este plano pasará por el pie O de la altura de la pirámide, por el pie Q de la altura del tetraedro y por el punto medio M de la arista KL. Bajando la perpendicular AB al plano de la base de la pirámide, examinemos el cuadrilátero $SOBA$. Su lado OB es la mitad de la diagonal del cuadrado mencionado y debe ser

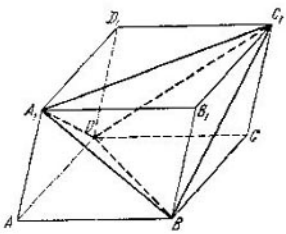

FIG. 162

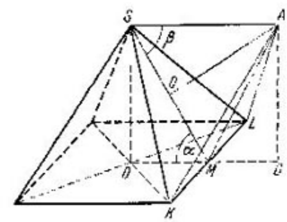

FIG. 163

determinado. Es fácil revelar que $SOBA$ es un rectángulo. En efecto, haciendo $\angle OMS=\alpha$, y $\angle ASM=\beta$, hallamos:

$$\cos\alpha=\frac{OM}{MS}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

y

$$\cos\beta=\frac{QS}{SA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por eso SA y OB son paralelos y, por consiguiente,

$$OB=SA=a.$$

Así pues, la distancia buscada es igual a $a\sqrt{2}$.

451. Supongamos que el plano secante ha sido trazado por cierto punto de la diagonal HP del cubo dado (fig. 164). Examinemos al principio las secciones que cortan a la diagonal en los puntos del segmento OP. Separemos la seccion QRS que pasa por tres vértices del cubo, ella, evidentemente, pertenece al conjunto que se examina. Es un triangulo equilátero cuyo lado es $a\sqrt{2}$. Es fácil calcular que la distancia desde esta sección hasta el centro del cubo es igual a $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Es evidente, que si $x\geqslant\frac{a\sqrt{3}}{6}$ en la sección se obtienen triángulos equiláteros. Puesto que la relación entre los lados de los triángulos en cuestión es igual a la relación entre sus distancias hasta el punto P, entonces

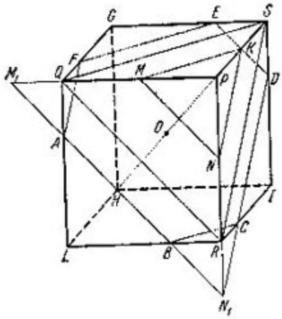

FIG. 164

$$\frac{MN}{QR}=\frac{OP-x}{OP-\frac{a\sqrt{3}}{6}}.$$

De aquí, tomando en consideración que

$$QR = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad OP = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

hallamos.

$$MN = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,a - x\sqrt{6}. \tag{1}$$

Si $\frac{a\sqrt{3}}{6} > x \geq 0$, entonces en la sección se obtienen los hexágonos $ABCDEF$.

Los lados AB, FE y CD del hexágono son respectivamente paralelos a los lados QR, QS y RS del triángulo equilátero QRS. Por esta razón, en su pro longación, intersecándose, forman ángulos de 60°. Teniendo en cuenta que $AF \parallel CD$, etc., llegamos a la conclusión de que todos los ángulos del hexágono son iguales a 120°. Es fácil ver también, que $AB = CD = EF$ y $BC = DE = AF$ (se debe tener en cuenta que los lados del hexágono cortan en las caras triángulos isósceles).

Con el fin de hallar las longitudes de los lados del hexágono, prolonguemos el lado AB del hexágono hasta su intersección con las prolongaciones de las aristas PQ y PR en los puntos M_1 y N_1. La longitud del segmento M_1N_1 puede ser calculada por la fórmula (1). Conociendo M_1N_1 hallamos el segmento

$$BN_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} M_1N_1 - a\right)\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}$$

De donde

$$AB = M_1N_1 - 2BN_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{6}. \tag{2}$$

El lado BC se podría hallar análogamente. No es difícil, sin embargo, comprender que $BC = BN_1$ y, por consiguiente,

$$BC = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}. \tag{3}$$

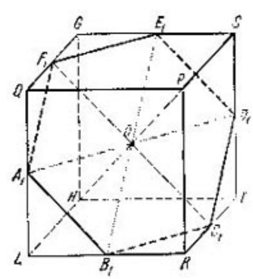

FIG 165

Señalemos que en la sección con el plano π que pasa por el punto O se obtiene un hexágono regular (véase las fórmulas (2) y (3) para $x = 0$). Los vértices de este hexágono se encuentran en los puntos medios de las aristas del cubo (fig. 165). Es fácil ver que si a una de las dos partes en las que el plano π divide al cubo se la hace girar 60° en torno a la diagonal OP, entonces el hexágono coincide consigo mismo y obtendremos dos polígonos dispuestos simétricamente con respecto al plano π. Por consiguiente, la sección que corta a la diagonal en los puntos del segmento HO a la distancia x del punto O, se obtiene de la correspondiente sección del conjunto de planos secantes ya examinado haciéndolo girar a 60°.

452. En la proyección se obtendrá un hexágono regular cuyo lado será igual a $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Para convencerse de esto es cómodo representarse el resultado de la proyección de todas las secciones posibles del cubo, examinadas en el problema 451 (véase la fig. 164). Todas las secciones indicadas se proyectan sin modificar sus dimensiones y obtendremos la figura mostrada en la fig. 166.

Valiéndonos de que el lado del triangulo RQS es igual a $a\sqrt{2}$, del triangulo GOS hallamos:

$$GS\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

de donde $GS=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Puesto que, a continuación, el lado del hexágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (véase la fig. 164) es igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, entonces, la relación buscada resultará igual a

$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{4}{3}.$$

453. Sea $AEFD$ el trapecio isósceles que se obtiene en la sección y sean G y H los puntos medios de sus bases (véase la fig. 167). Bajemos desde el punto H la perpendicular HK a la base de la pirámide. Puesto que H es el punto medio de SN, entonces

$$HK=\frac{h}{2}, \quad KN=\frac{a}{4}, \quad GK=\frac{3a}{4} \qquad (1)$$

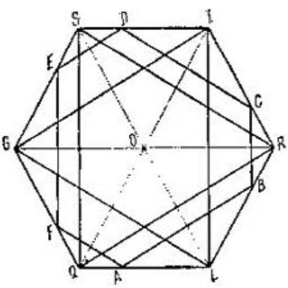

FIG. 166

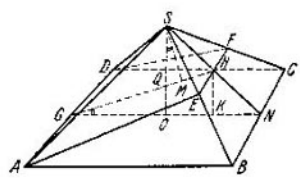

FIG. 167

Determinemos, a continuación, las longitudes de los segmentos QO y QS. Dado que

$$\frac{QO}{HK}=\frac{GO}{GK},$$

entonces, teniendo en cuenta (1), obtenemos que

$$QO=\frac{h}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{3a}=\frac{h}{3},$$

de donde

$$QS=\frac{2}{3}h$$

y

$$GQ=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{3}\right)^2}. \qquad (2)$$

Bajemos desde el punto S la perpendicular SM a GH. Entonces, de la semejanza de los triángulos SMQ y GOQ tenemos que

$$\frac{SM}{QS}=\frac{GO}{GQ}$$

y, por consiguiente, la distancia buscada es igual a

$$SM=QS\cdot\frac{GO}{GQ}=\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}.$$

454. El cuerpo que se examina está compuesto por dos pirámides con base común KMN (fig. 168). La altura OR de la pirámide inferior es fácil de hallar, bajando desde el punto P (punto medio del lado KN) la perpendicular PD a la base de la pirámide. El punto D dividirá al segmento QL por la mitad. Valiéndonos de este hecho, del $\triangle APD$ obtenemos:

$$\frac{PD}{RQ}=\frac{DA}{QA}=\frac{5}{4}.$$

De aquí

$$RQ=\frac{4}{5}PD$$

y, por consiguiente,

$$OR=\frac{1}{5}PD=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{30}.$$

Aquí, hemos aprovechado que la altura de un tetraedro regular es igual a $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. El volumen buscado es igual a

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{80}.$$

455. Supongamos que sea $AMKN$ el cuadrilátero obtenido en la sección y Q el punto de intersección de sus diagonales (véase la fig. 169). Al examinar el

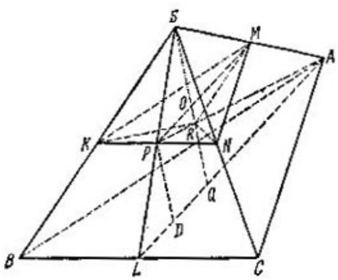

FIG. 168

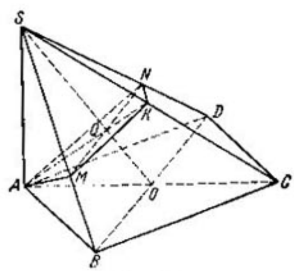

FIG. 169

$\triangle SAC$ es fácil ver que Q se encuentra en la intersección de las medianas de este triángulo. Por eso,

$$\frac{MN}{BD}=\frac{SQ}{SO}=\frac{2}{3}$$

y, por consiguiente,

$$MN=\frac{2}{3}b.$$

Luego, del triángulo rectángulo SAC hallamos que

$$AK=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{q^2+a^2}.$$

Puesto que $AK\perp MN$, entonces

$$S_{sec}=\frac{1}{2}AK\cdot MN=\frac{b}{6}\sqrt{q^2+a^2}.$$

456. Sean NQN_1Q_1 y LML_1M_1 las secciones paralelas del prisma (fig. 170), a la longitud de la diagonal AC de la base y H la longitud del segmento KK_1. Entonces, el área de la primera sección será

$$S=\frac{H}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}Ha.$$

El área de la segunda sección será

$$S'=\frac{1}{2}PT(A_2C_2+LM)+\frac{1}{2}P_1T(A_2C_2+L_1M_1).$$

Pero,

$$A_2C_2=a,\quad LM=\frac{a}{4},\quad L_1M_1=\frac{3}{4}a,\quad PT=\frac{3}{4}H,\quad P_1T=\frac{1}{4}H,$$

lo que se ve fácilmente de la semejanza de los triangulos correspondientes. En virtud de esto, obtenemos:

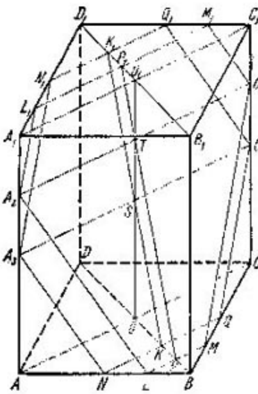

FIG. 170

$$S'=\frac{11}{16}aH$$

y, por consiguiente,

$$S'=\frac{11}{12}S.$$

Observación. Este problema puede ser fácilmente resuelto por otro procedimiento, si se toma en consideración la fórmula

$$S_{\text{proyec}}=S\cos\varphi, \tag{1}$$

donde S es el área de cierto polígono dispuesto en el plano P, S_{proyec} es el área de la proyección de este polígono sobre el plano Q, y φ es el ángulo entre los planos P y Q.

De acuerdo con la fórmula (1), las áreas de las secciones paralelas examinadas en el problema son entre sí como las áreas de sus proyecciones. Así pues, nuestro problema se reduce a hallar las áreas de dos figuras: $L_1'M_1'CMLA$ y $N_1'Q_1'CQNA$ (fig. 171) (las letras con rasgos significan las proyecciones de los puntos correspondientes sobre la base del prisma).

457. Examinemos la pirámide $KAEF$, que es uno de los poliedros (véase la fig. 172). Consideramos que

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}.$$

Por eso,

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente,

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}. \tag{1}$$

Supongamos, a continuación, que KM y SN son las alturas de las pirámides $KAEF$ y $SABC$. Es fácil ver que

$$\frac{KM}{SN}=\frac{AK}{AS}=\frac{2}{3}.$$

Por eso

$$KM = \frac{2}{3}SN$$

y, por consiguiente, teniendo en cuenta (1), obtenemos que

$$V_{KAEF} = \frac{2}{27}V_{SABC}.$$

La relación buscada es igual a $\frac{2}{25}$.

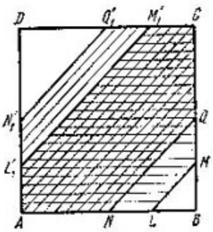

FIG. 171

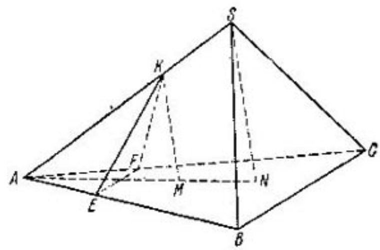

FIG. 172

458. Tomemos la cara de área S_0 como base ABC de la pirámide dada $ABCD$. Sea DO la altura de la pirámide y DA_1, DB_1 y DC_1 las alturas de las caras laterales (fig. 173).

Según el teorema de las tres perpendiculares $OC_1 \perp AB$, $OA_1 \perp BC$ y $OB_1 \perp AC$, en virtud de lo cual los ángulos $\angle DC_1O$, $\angle DA_1O$ y $\angle DB_1O$ son ángulos lineales de los respectivos ángulos diedros y según la condición del problema son iguales. De aquí se deduce la igualdad de los triángulos DOC_1, DOA_1 y DOB_1. Para comodidad del cálculo introduzcamos las siguientes denotaciones:

$$DO = H, \quad DC_1 = DA_1 = DB_1 = h,$$
$$OC_1 = OA_1 = OB_1 = r, \qquad S_1 + S_2 + S_3 = S.$$

Es evidente, que r es el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. El volumen de la pirámide $ABCD$ es

$$V = \frac{1}{3}S_0H. \qquad (1)$$

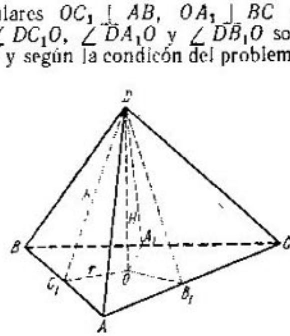

FIG. 173

Del triángulo rectángulo DOC_1 obtendremos.

$$H = \sqrt{h^2 - r^2}. \qquad (2)$$

Así pues, el problema se reduce a la determinación de la apotema h y del radio r. De la fórmula $S_3 = \frac{1}{2}ABh$ y otras análogas obtendremos las expresiones para los lados del triángulo ABC:

$$AB = \frac{2S_3}{h}, \qquad BC = \frac{2S_1}{h}, \qquad AC = \frac{2S_2}{h}.$$

Por consiguiente, el semiperímetro será

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{S_3}{h} + \frac{S_1}{h} + \frac{S_2}{h} = \frac{S}{h}.$$

Luego,

$$p-AB=\frac{S}{h}-\frac{2S_3}{h}=\frac{S-2S_3}{h},$$

$$p-BC=\frac{S-2S_1}{h}, \quad p-AC=\frac{S-2S_2}{h},$$

y por la fórmula de Heron

$$S_0^2=p(p-AB)(p-BC)(p-AC)=$$
$$=\frac{S}{h}\cdot\frac{S-2S_1}{h}\cdot\frac{S-2S_2}{h}\cdot\frac{S-2S_3}{h}=\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4},$$

de donde

$$h=\frac{\sqrt[4]{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}}{\sqrt{S_0}}. \qquad (3)$$

El radio r de la circunferencia inscrita lo hallaremos de la fórmula que expresa el área S_0 del triángulo ABC por medio de este radio y el semiperímetro:

$$S_0=pr=\frac{S}{h}r,$$

de donde

$$r=h\frac{S_0}{S}.$$

Colocando este valor de r en la fórmula (2), hallaremos;

$$H=\sqrt{h^2-h^2\frac{S_0^2}{S^2}}=\frac{h}{S}\sqrt{S^2-S_0^2}.$$

Colocando aquí el valor de h de la fórmula (3) e introduciendo el resultado obtenido en la fórmula (1), obtendremos definitivamente:

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2-S_0^2)}\sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}$$

459. Cortemos al cubo por la mitad con ayuda de un plano diagonal, perpendicular al eje de rotación, y giremos 90° el poliedro obtenido. Como resultado obtendremos la configuración representada en la fig. 174.

La parte común la componen el paralelepípedo rectangular $ABCDD_1A_1B_1C_1$ y la pirámide regular $SABCD$. La altura del paralelepípedo la hallamos del triángulo BB_1T:

$$h=B_1T=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}.$$

La altura de la pirámide es

$$H=\frac{a\sqrt{2}}{2}-h=\frac{a}{2}.$$

El área de la base común del paralelepipedo y la pirámide es igual a a^2.

De este modo, el volumen buscado de la parte común será

$$V=2\left[a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}\right)+a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\right],$$

o bien

$$V=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right).$$

460. Sea S el vértice del cono, $SO=h$ la altura del cono, ASB el triángulo que se obtiene en la sección, C el punto medio de la cuerda AB, y $AO=r$ (fig. 175). Observando que $\angle AOC=\frac{\beta}{2}$, hallamos:

$$CO=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},\qquad h=CO\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},\qquad r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}.$$

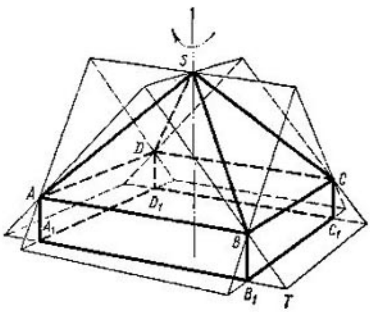

FIG. 174

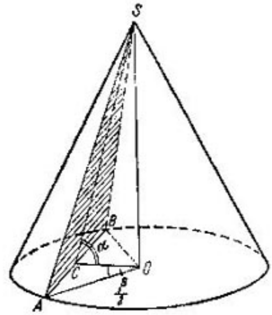

FIG. 175

Por esta razón, el volumen del cono es

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi a^3}{24}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}^3\frac{\beta}{2}}.$$

461. Sea α el ángulo buscado, l la generatriz del cilindro, l_1 la generatriz del cono y r el radio de la base del cono y del cilindro (fig. 176). Según la condición del problema

$$\frac{2\pi r(r+l)}{\pi r(r+l_1)}=\frac{7}{4},\qquad\frac{r+l}{r+l_1}=\frac{7}{8}.$$

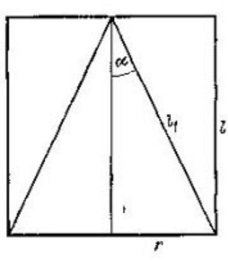

FIG. 176

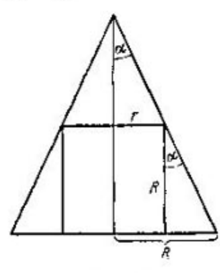

FIG. 177

Por consiguiente,

$$\frac{1+\frac{l}{r}}{1+\frac{l_1}{r}}=\frac{7}{8},\ \text{o bien}\ \frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{7}{8}$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\alpha+8\cos\alpha-7=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallaremos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}, \quad \alpha=\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}.$$

462. Supongamos que sea α el ángulo buscado, R el radio de la base del cono y r el radio de la base del cilindro (fig. 177). Tenemos:

$$\frac{2\pi r^2+2\pi rR}{\pi R^2}=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}=\frac{3}{2}.$$

Pero $\frac{R-r}{R}=\operatorname{tg}\alpha$ y, por lo tanto, $\frac{r}{R}=1-\operatorname{tg}\alpha$. Como resultado obtenemos la siguiente ecuación respecto de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$4\operatorname{tg}^2\alpha-12\operatorname{tg}\alpha+5=0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}, \text{ o bien } \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

Sin embargo, se ve fácilmente que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{R-r}{R}<1$, por eso, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

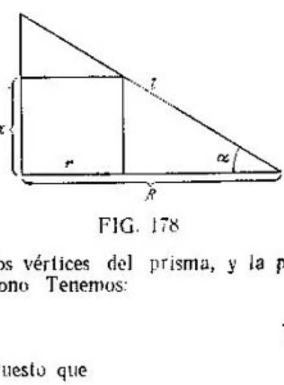

FIG. 178

463. Sea l la longitud de la generatriz, R el radio de la base del cono, x la longitud de la arista del prisma y r el radio de la circunferencia circunscrita a la base del prisma (fig. 178). Examinemos el triángulo formado por la altura del cono, por la generatriz del cono, que pasa por uno de los vértices del prisma, y la proyección de esta generatriz sobre la base del cono. Tenemos:

$$\frac{l\operatorname{sen}\alpha}{l\operatorname{sen}\alpha-x}=\frac{R}{r}.$$

Puesto que

$$r=\frac{x}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} \quad \text{y} \quad R=l\cos\alpha,$$

obtendremos que

$$x=\frac{2l\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Por consiguiente, la superficie total del prisma será

$$S=\frac{1}{2}nx^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}+nx^2=n\left(\frac{2l\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\right).$$

464. Examinemos el trapecio isósceles AB_1C_1D obtenido como resultado de la proyección del trapecio dado $ABCD$ sobre el plano perpendicular al eje del cilindro (fig. 179). Puesto que el trapecio que se examina está circunscrito a una circunferencia, entonces

$$AB_1 = AK + KB_1 = AM + B_1N_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Del triángulo rectángulo APB_1 obtenemos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

De aquí

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{ab}}{h} \quad \text{y} \quad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{ab}}{h}.$$

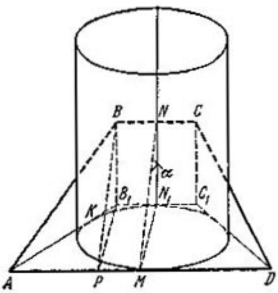

FIG. 179

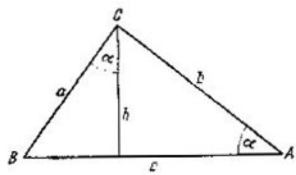

FIG. 180

465. Sea R el radio de la esfera y a, b y c los catetos y la hipotenusa respectivamente del triángulo ABC que se encuentra en la base del prisma (fig. 180). Tenemos:

$$a = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad c = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}.$$

Es evidente que el radio R es igual al radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Por eso

$$R = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{h}{1 + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}$$

y, por consiguiente, el volumen del prisma será

$$V = S_{\triangle ABC} 2R = \frac{2h^3}{\operatorname{sen} 2\alpha\,(1 + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}.$$

466. El volumen de la pirámide es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que se obtienen al unir el centro de la esfera inscrita O con todos los vértices de la pirámide. La altura de cada una de estas pirámides es igual al radio r de la esfera inscrita en dada pirámide. Si S es el área de la base de la pirámide y S_1 es la superficie lateral, entonces, el volumen de la pirámide será

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S)\,r. \qquad (1)$$

Puesto que, por otro lado,

$$V = \frac{1}{3} hS,$$

entonces, obtenemos para r la fórmula

$$r=\frac{hS}{S_1+S}. \tag{2}$$

De las condiciones del problema se desprende:

$$S=\frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n},$$

$$S_1=\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},$$

$$h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (2), hallamos:

$$r=\frac{na^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}}}{4\left(\frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}+\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\right)}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}}}{2\left(a+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-a^2}\right)}.$$

467. Designemos por r el radio de la esfera inscrita y por a la longitud del segmento OE (fig. 181). Entonces,

$$r=a\operatorname{tg}\alpha,$$

donde α es la mitad del ángulo buscado (véase la fig. 181). Por consiguiente el volumen de la esfera será

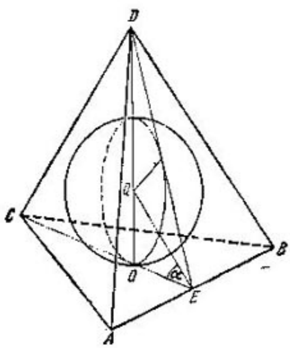

FIG. 181

$$V_{\text{esf}}=\frac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^3\alpha.$$

Puesto que $DO=a\operatorname{tg}2\alpha$, y $AB=2\sqrt{3}\,a$, entonces, el volumen de la pirámide será

$$V_{\text{pir}}=\frac{1}{3}DO\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}\,a^3\operatorname{tg}2\alpha.$$

Puesto que por la condición del problema

$$\frac{V_{\text{pir}}}{V_{\text{esf}}}=\frac{27\sqrt{3}}{4\pi},$$

expresando $\operatorname{tg}2\alpha$ por medio de $\operatorname{tg}\alpha$, obtenemos la ecuación

$$\operatorname{tg}^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=\frac{2}{9}.$$

De aquí

$$(\operatorname{tg}\alpha)_1^2=\frac{1}{3}\quad\text{y}\quad(\operatorname{tg}\alpha)_2^2=\frac{2}{3}.$$

Teniendo en cuenta que α es un ángulo agudo, hallamos:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{6}$$

y

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

468. Sea a el lado y b la apotema del polígono de n lados que se encuentra en la base de la pirámide, H la altura de la pirámide. Entonces (fig. 182, a y b)

$$b = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2},$$

$$a = 2b \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n};$$

el área de la base es

$$S_{\text{base}} = n \frac{ab}{2} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Luego,

$$H = b \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

De aquí, el volumen de la pirámide será

$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{3} nr^3 \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

Puesto que el volumen de la esfera es

$$V_{\text{esf}} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

entonces,

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{pir}}} = \frac{4\pi}{n} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$$

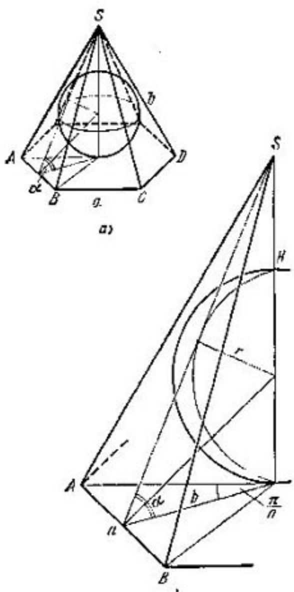

FIG. 182

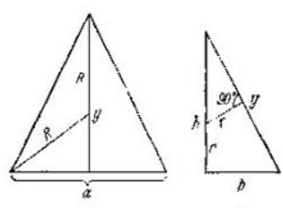

FIG. 183

469. Sea a el lado de la base de la pirámide, b la apotema de la base, R el radio de la circunferencia circunscrita a la base, h la altura de la pirámide, r el radio de la esfera inscrita en la pirámide, y la altura de la cara lateral bajada desde el vértice de la pirámide (fig. 183, a y b). Entonces,

$$a = 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}, \quad b = R \cos \frac{\pi}{n},$$

además,

$$y = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right),$$

$$h = \sqrt{y^2 - b^2} = R\sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

De la ecuación

$$\frac{r}{h-r} = \frac{b}{y}$$

(vease la fig 183, *b*) hallamos:

$$r = \frac{hb}{y+b} = \frac{R\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{n}}}{1+2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Por consiguiente, la relación buscada es igual a

$$\frac{\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}nab}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\pi\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

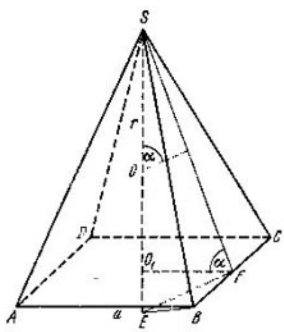

FIG. 184

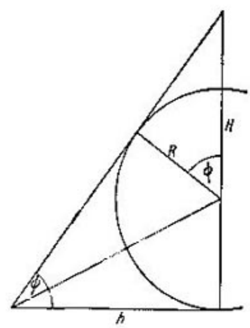

FIG. 185

470. Supongamos que sea a el lado de la base de la pirámide $SABCD$, h la altura de la pirámide y r el radio de la esfera circunscrita a la pirámide (fig. 184). Entonces,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si SE es el diámetro de la esfera circunscrita, entonces, del triángulo rectángulo SBE se desprende:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h(2r - h).$$

Sin embargo, puesto que del triángulo FO_1S tenemos que $\frac{a}{2} = h\,\mathrm{cotg}\,\alpha$, entonces, eliminando a a, hallamos:

$$h=\frac{2r}{2\operatorname{cotg}^2\alpha+1}=\frac{1}{1+2\operatorname{cotg}^2\alpha}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

471. Empleando la igualdad de los ángulos diedros, así como en el problema 458 no es difícil demostrar que la perpendicular bajada desde el vértice a la base se proyecta al centro de simetría del rombo. Es fácil también ver que el centro de la esfera inscrita se encuentra en la perpendicular mencionada.

Supongamos que sea a el lado del rombo, $2h$ la altura del rombo y H la altura de la pirámide (fig. 185). Entonces, el área de la base es $S=a^2 \operatorname{sen}\alpha$, o puesto que $a=\frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}$,

$$S=\frac{4h^2}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Pero, $h=R\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}$ (véase la fig. 185, donde está representada la sección que pasa por la altura de la pirámide y la altura del rombo). Está también claro, que

$$H=R+\frac{R}{\cos\psi}=R\frac{2\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}$$

Como resultado obtenemos el volumen del prisma

$$V=\frac{8}{3}R^3\frac{\cos^4\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\alpha\cos\psi\operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2}}.$$

472. Tracemos un plano por los vértices S_1 y S_2 de las pirámides y el punto medio A de uno de los lados de la base (fig. 186). El radio de la semicircunferencia, inscrita en el triángulo AS_1S_2 de tal modo que su diámetro se encuentra sobre S_1S_2, evidentemente, es igual al radio de la esfera inscrita. Sea O el centro de la semicircunferencia. Designemos por b la altura del triángulo AS_1S_2 bajada al lado S_1S_2. Dado que b es la apotema del polígono regular de n lados, entonces,

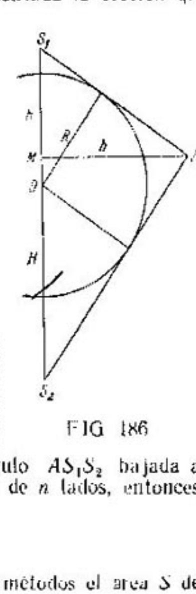

FIG 186

$$b=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

El radio de la esfera R lo hallaremos calculando por dos métodos el área S del triángulo AS_1S_2. Por una parte,

$$S=\frac{b}{2}(H+h),$$

por otra parte,

$$S=\frac{R}{2}S_1A+\frac{R}{2}S_2A=\frac{R}{2}\left(\sqrt{h^2+b^2}+\sqrt{H^2+b^2}\right).$$

Como resultado obtenemos la fórmula definitiva

$$R=\frac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}+\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

473. Sean h_1 y h_2 las alturas de las pirámides, r el radio de la circunferencia circunscrita a la base (fig. 187). Entonces,

$$\frac{a}{2}=r\ \text{sen}\ \frac{\pi}{n}.$$

Del triángulo rectángulo S_1AS_2, cuyos vértices son al mismo tiempo los vértices de las pirámides dadas y uno de los vértices de la base, hallaremos que

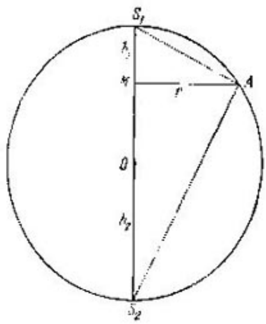

FIG. 187

$$h_1h_2-r^2=\frac{a^2}{4\ \text{sen}^2\ \frac{\pi}{n}}.$$

Pero,

$$h_1+h_2=2R.$$

De aquí,

$$h_1=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\ \text{sen}^2\ \frac{\pi}{n}}},$$

$$h_2=R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\ \text{sen}^2\ \frac{\pi}{n}}}.$$

La solución es posible si $R\geqslant\dfrac{a}{2\ \text{sen}\ \frac{\pi}{n}}$.

474. Es fácil demostrar que el punto medio del segmento que une los centros de las bases del prisma es el centro de las esferas inscrita y circunscrita. El radio de la circunferencia inscrita en la base es igual al radio de la esfera inscrita. Sea r el radio de la esfera inscrita, R el radio de la esfera circunscrita. Examinemos el triángulo rectángulo cuyos vértices son uno de los vértices de la base, el centro de la base y el centro de las esferas. Tenemos que $R^2=r^2+r_1^2$, donde

$$r_1=\frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

De aquí,

$$R=r\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

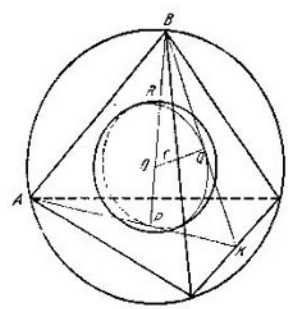

FIG. 188

La relación entre el volumen de la esfera circunscrita y el volumen de la esfera inscrita es

$$\frac{R^3}{r^3}=\left(1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

475. Los radios de las esferas circunscrita e inscrita son iguales a los segmentos en que el centro común de las esferas divide a la altura del tetraedro. Es fácil revelar que la relación de estos segmentos es 3:1. En efecto, de la semejanza de los triángulos BQO y BPK (fig. 188) tenemos,

$$\frac{R}{r}=\frac{BK}{PK},$$

pero,

$$\frac{BK}{PK}=\frac{BK}{QK}=3.$$

Puesto que las superficies de las esferas son entre sí como los cuadrados de sus radios, la relación buscada es igual a 9.

476. Los volúmenes de los tetraedros regulares son entre sí como los cubos de los radios de las esferas inscritas en estos tetraedros. Puesto que la esfera inscrita en el tetraedro mayor está circunscrita al tetraedro menor, entonces, la relación de los radios mencionados de las esferas inscritas (véase la resolución del problema 475) es igual a 3:1. Por consiguiente, la relación buscada de los volúmenes es igual a $3^3=27$.

477. Supongamos que el problema es soluble. Tracemos el plano $A_1B_1C_1$ (véase la fig. 189, *a*) de tal modo que haga contacto con la esfera menor y que

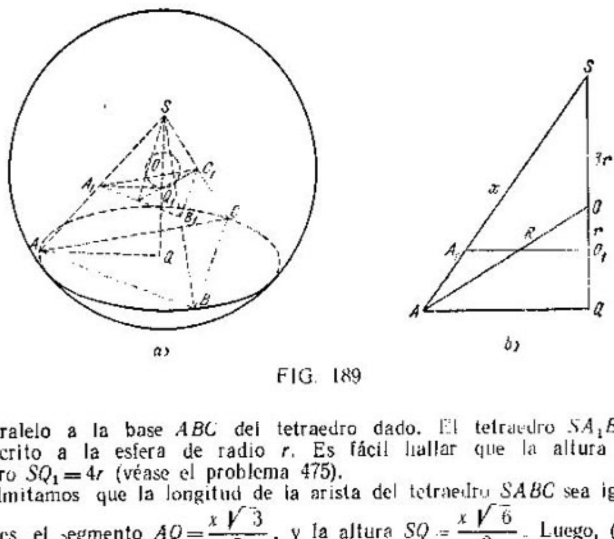

FIG. 189

sea paralelo a la base ABC del tetraedro dado. El tetraedro $SA_1B_1C_1$ está circunscrito a la esfera de radio r. Es fácil hallar que la altura de este tetraedro $SQ_1=4r$ (véase el problema 475).

Admitamos que la longitud de la arista del tetraedro $SABC$ sea igual a x. Entonces, el segmento $AQ=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, y la altura $SQ=\frac{x\sqrt{6}}{3}$. Luego, (véase la fig. 189, *b*) tenemos que $QO=\frac{x\sqrt{6}}{3}-3r$ y del triángulo rectángulo AQO se desprende que $\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{6}}{3}-3r\right)^2=R^2$.

Resolviendo esta ecuación cuadrada hallaremos que

$$x_{1,2}=r\sqrt{6}\pm\sqrt{R^2-3r^2}.$$

En esta fórmula debe tomarse solamente la raíz con signo más, puesto que SA en todo caso es mayor que $3r$, y $3r>r\sqrt{6}$. Es evidente que el problema es posible con la condición de que sea $R\geqslant\sqrt{3}r$.

478. Sea $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ el hexágono regular obtenido en la sección del cubo. El problema se reduce a la determinación del radio de la esfera inscrita en la pirámide hexagonal regular $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (véase la fig. 190). El lado de la base de la pirámide es igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ y su altura es igual a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Valiéndonos de que el radio de la esfera inscrita en la pirámide es igual al triple del volumen de la pirámide dividido por su superficie total (véase la fórmula (1) en la resolución del problema 466), hallamos:

$$r=\frac{a(3-\sqrt{3})}{4}.$$

Por consiguiente, la relación buscada será igual a

$$\frac{2(3+\sqrt{3})^3}{9\pi}.$$

479. Sea O el centro de la esfera, y AS, BS y CS las cuerdas dadas. Es evidente, que el triángulo ABC es equilátero (fig. 191). Es fácil también ver que la perpendicular SO_1 al plano ABC, al ser prolongada, pasa por el centro de la esfera O, puesto que el punto O_1 es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

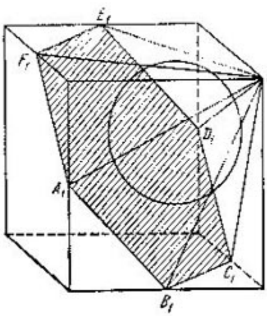

FIG. 190

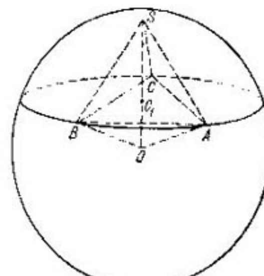

FIG. 191

Designemos, después de estas observaciones, la longitud buscada de las cuerdas por d. Del triángulo SAB hallamos que

$$AB=2d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

y, por consiguiente,

$$O_1A=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Calculando por dos procedimientos distintos el área del triángulo isósceles SOA, obtenemos:

$$\frac{1}{2}R\,\frac{2}{3}\sqrt{3}\,d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\,d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}},$$

de donde

$$d=2R\sqrt{1-\frac{4}{3}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}.$$

480. El radio de la esfera inscrita lo hallaremos por la fórmula (véase la fórmula (1) en la resolución del problema 466)

$$r=\frac{3V}{S},$$

donde S es la superficie total de la pirámide y V su volumen. Hallemos al principio el volumen de la pirámide. Observemos para ello, que los triángulos rectángulos BSC y BSA (fig. 192) son iguales, puesto que son iguales sus hipotenusas y tienen un cateto común. En virtud de esto, el triángulo rectángulo ASC es isósceles. Dado que

$$AS=CS=\sqrt{a^2-b^2},$$

entonces,

$$V=\frac{1}{3}BS\cdot S_{\triangle ASC}=\frac{1}{3}b\cdot\frac{(a^2-b^2)}{2}.$$

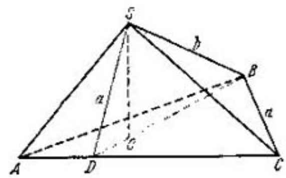

FIG. 192

Es también evidente, que

$$AD=\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

y, por consiguiente,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^4-b^4}$$

Como resultado, después de las simplificaciones correspondientes, obtenemos:

$$r=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+2b+\sqrt{a^2-b^2}}.$$

481. Designemos por r el radio de la esfera inscrita, y por R el radio de la esfera circunscrita.

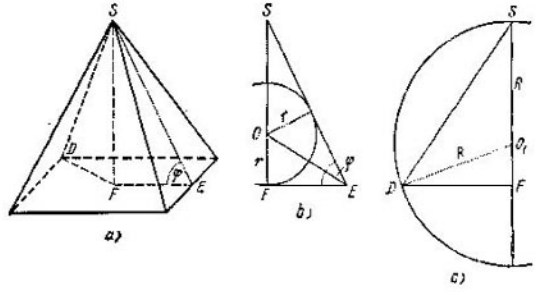

FIG. 193

Examinemos al principio el triángulo SFE, uno de los lados del cual, el lado SF, es la altura de la pirámide, y el otro, el SE, es la altura de la cara lateral (fig. 193, a). Sea O el centro de la esfera inscrita. De los triángulos

SFE y OFE (fig. 193, *b*) tenemos:

$$FE = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2},$$

$$SF = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

A continuación, es evidente, que

$$DF = EF \cdot \sqrt{2} = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{2}.$$

Recurriendo a la fig. 193, *c*, donde está representada la sección trazada por el centro de la pirámide y su arista lateral, hallaremos fácilmente que

$$DO_1^2 = O_1F^2 + DF^2$$

o bien

$$R^2 = (SF - R)^2 + DF^2.$$

De aquí,

$$R = \frac{SF^2 + DF^2}{2SF}. \tag{1}$$

Puesto que $R = 3r$, entonces, colocando aquí las expresiones halladas anteriormente para SF y DF, obtenemos una ecuación respecto de φ:

$$3r = \frac{r^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + r^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2}{2r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi},$$

o, después de las simplificaciones correspondientes,

$$6 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = 2 + \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Hagamos, a continuación, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$. Observando que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2z}{1 - z^2}$, obtenemos la ecuación

$$7z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

De aquí

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}}.$$

Puesto que $z > 0$, son posibles solamente dos respuestas:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{7}}$$

y

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{7}}.$$

482. En total se obtienen 6 biángulos (por el número de aristas) y 4 triángulos (fig. 194). Designemos por S_1 el área de cada triángulo y por S_2 el área de cada biángulo. Tenemos:

$$4S_1 + 6S_2 = 4\pi R^2. \tag{1}$$

Sea S_0 la suma de las áreas de uno de los triángulos y de tres biángulos adyacentes a este triángulo. S_0 es el área del segmento esférico cortado por el plano de la cara del tetraedro. Este área es igual a $2\pi Rh$, donte h es la altura del segmento. Puesto que la altura del tetraedro se divide por el centro de la esfera en la relación de 3:1, (véase el problema 475), entonces

$$H=R+\frac{1}{3}R=\frac{4}{3}R,$$

de donde hallamos que $h=2R-\frac{4}{3}R=\frac{2}{3}R$. Luego,

$$S_1+3S_2=2\pi R\cdot\frac{2}{3}R=\frac{4}{3}\pi R^2. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema, compuesto de las ecuaciones (1) y (2), respecto a las incógnitas S_1 y S_2, obtenemos:

$$S_1=\frac{2}{3}\pi R^2, \qquad S_2=\frac{2}{9}\pi R^2.$$

483. Sea R el radio de la base del cono, α el ángulo entre el eje del cono y la generatriz, y r el radio de la esfera inscrita. En la sección axial del cono tenemos un triángulo isósceles ABC (fig. 195). El radio de la circunferencia

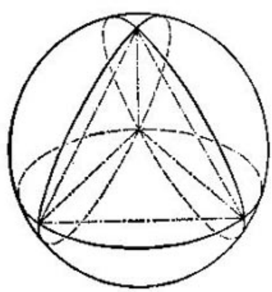

FIG. 194

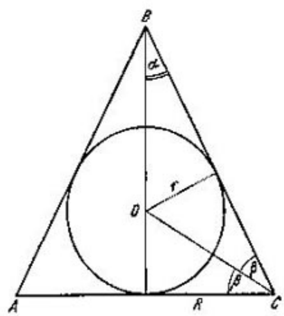

FIG 195

inscrita en este triángulo es igual al radio r de la esfera inscrita en el cono. Sea O el centro de la circunferencia, $\angle OCA=\beta$. Entonces, es evidente, que $\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{R}$. Pero, según la condición del problema,

$$\frac{4\pi r^2}{\pi R^2}=4\left(\frac{r}{R}\right)^2=\frac{4}{3}.$$

De aqui que sea $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y, por consiguiente, $\beta=\frac{\pi}{6}$. Puesto que, además, $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$, entonces, $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, el ángulo buscado sera

$$2\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

484. Sea r el radio de la semicircunferencia, R el radio de la base del cono, l la generatriz del cono y α el ángulo formado por el eje del cono y la generatriz.

Por la condición del problema tenemos que

$$\frac{\pi R(l+R)}{2\pi r^2}=\frac{18}{5}. \qquad (1)$$

Introduzcamos en esta igualdad el ángulo α. Con este fin examinemos el triángulo isósceles ABC (fig. 196), obtenido en la sección axial del cono. Del triángulo ABC hallamos que

$$R=l\operatorname{sen}\alpha, \quad r=R\cos\alpha=l\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Sustituyendo estas expresiones en la parte izquierda de (1), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}=\frac{18}{5}.$$

Puesto que $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$, entonces, simplificando el quebrado por $1+\operatorname{sen}\alpha$, tendremos que

$$36\operatorname{sen}^2\alpha-36\operatorname{sen}\alpha+5=0,$$

de donde

$$\operatorname{sen}\alpha_1=\frac{5}{6} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha_2=\frac{1}{6}.$$

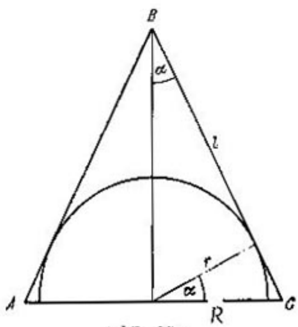

FIG. 196

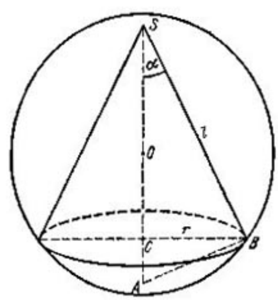

FIG. 197

Por consiguiente, el angulo buscado del vértice del cono es igual a

$$2\arcsen\frac{5}{6} \quad \text{o bien} \quad 2\arcsen\frac{1}{6}.$$

485. Supongamos que sea h la altura del cono, r el radio de la base, l la generatriz del cono y α el ángulo formado por la generatriz y la altura (fig. 197). Según la condición del problema tenemos que $\pi rl=k\pi r^2$; de aquí, $l=kr$ y, por consiguiente, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{k}$. Del triángulo rectángulo ABC obtenemos:

$$r=2R\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2R\,\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}.$$

$$h=2R\cos\alpha\cos\alpha=2R\,\frac{k^2-1}{k^2}.$$

El volumen buscado del cono será

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{8}{3}\pi R^3\left(\frac{k^2-1}{k^4}\right)^2.$$

486. Sea R el radio de la esfera, h la altura del cono y r el radio de la base del cono. La relación del volumen del cono al volumen de la esfera es

$$x=\frac{r^2h}{4R^3}=\frac{q}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Del triángulo SBA (fig. 198) tenemos que $r^2=h(2R-h)$. De aquí

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{h}{R}\left(2-\frac{h}{R}\right)=q(2-q)$$

y, por consiguiente,

$$x=\frac{q^2}{4}(2-q).$$

El problema es soluble, evidentemente, cuando $0<q<2$

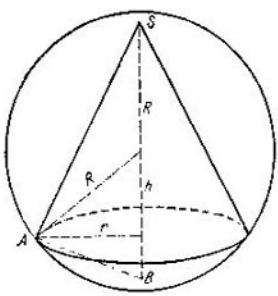

FIG. 198

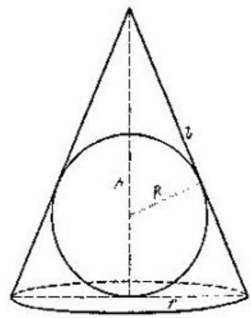

FIG. 199

487. Sea R el radio de la esfera, S_{esf} y V_{esf} la superficie y el volumen de la esfera, S_{cono} y V_{cono} la superficie total y el volumen del cono, h la altura del cono y r el radio de la base del cono (fig. 199). Entonces

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{cono}}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{4R^3}{r^2h},$$

$$\frac{S_{\text{esf}}}{S_{\text{cono}}}=\frac{4\pi R^2}{\pi r(l+r)}=\frac{4R^2}{r(l+r)}.$$

Observemos, sin embargo que,

$$\frac{l}{r}=\frac{h-R}{R}=\frac{h}{R}-1$$

y, por lo tanto,

$$\frac{l+r}{r}=\frac{h}{R},$$

obtenemos:

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{cono}}}=\frac{S_{\text{esf}}}{S_{\text{cono}}}=\frac{1}{n}.$$

Observación: Se puede obtener el mismo resultado por una vía más corta, valiéndose de la siguiente fórmula:

$$V_{\text{cono}}=\frac{1}{3}S_{\text{cono}}R, \tag{1}$$

donde S_{cono} es la superficie total del cono, y R es el radio de la esfera inscrita en este cono. La fórmula (1) se obtiene fácilmente de la fórmula correspondiente para la pirámide (véase la resolución del problema 466) por el método del paso límite. En efecto, puesto que es evidente que

$$V_{est}=\frac{1}{3}S_{est}\cdot R, \tag{2}$$

entonces, dividiendo (2) entre (1), obtendremos que

$$\frac{V_{est}}{V_{cono}}=\frac{S_{est}}{S_{cono}}=\frac{1}{n}.$$

488. Sea S la superficie total del cono, S_1 la superficie de la esfera, r_1 y r los radios de las bases superior e inferior del cono y l la longitud de su generatriz. Sea, luego, $CMDL$ el trapecio obtenido en la sección axial del cono: O el centro de la esfera inscrita y $AB\perp LD$ y $OF\perp MD$ (fig. 200). Tenemos,

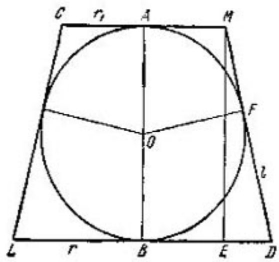

FIG. 200

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi l(r+r_1)+\pi r_1^2+\pi r^2}{4\pi R^2}=m. \tag{1}$$

Es fácil ver, que $AM=MF$ y que $BD=FD$, puesto que O es el centro de la circunferencia inscrita en el trapecio, por lo tanto,

$$l=r+r_1. \tag{2}$$

Valiéndonos de esta igualdad, de la igualdad (1) obtendremos:

$$l^2+r_1^2+r^2=4mR^2. \tag{3}$$

Del triángulo MED se desprende:

$$l^2=(r-r_1)^2+4R^2. \tag{4}$$

Eliminando l de las igualdades (2) y (4), hallaremos:

$$rr_1=R^2. \tag{5}$$

Con ayuda de esta igualdad, eliminando l de (2) y (3), obtendremos:

$$r^2+r_1^2=R^2(2m-1). \tag{6}$$

Resolviendo el sistema (5), (6), hallaremos:

$$r=\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3});$$

$$r_1=\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3}).$$

Así pues, si $m<\frac{3}{2}$ el problema no tiene solución; cuando $m=\frac{3}{2}$ el cono truncado se transforma en un cilindro.

489. Son posibles dos casos: 1) el vértice del cono y la esfera se encuentran a distintos lados del plano tangente; 2) el vértice del cono y la esfera se encuentran a un mismo lado del plano tangente.

Examinemos el primer caso. Tracemos un plano por el eje del cono y la generatriz del cono BC, de la que se habla en las condiciones del problema, (fig. 201). Este plano dará en la sección con el cono el triángulo ABC y, en la sección con la esfera, una circunferencia con el centro O; el plano perpendicular a BC será intersecado por la recta ME (M es el punto de tangencia). Tracemos $BD \perp AC$ y $OF \perp BC$. Sea $BD=h$, $OD=OF=r$, $CD=R$. Es evidente, que $OMEF$ es un cuadrado y, por lo tanto,

$$h=r+\sqrt{r^2+(d+r)^2}.$$

Luego,

$$\frac{R}{h}=\frac{r}{d+r}, \qquad R=\frac{hr}{d+r}.$$

Así pues, en el primer caso, el volumen del cono es

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi\frac{h^3 r^2}{(d+r)^2}=\frac{\pi r^2\left(r+\sqrt{r^2+(d+r)^2}\right)^3}{3(d+r)^2}.$$

En el segundo caso el problema se resuelve análogamente. El volumen del cono resulta igual a

$$\frac{\pi r^2\left(r+\sqrt{r^2+(d-r^2)}\right)^3}{3(d-r)^2}.$$

490. Examinemos la sección axial ABC del cono. Supongamos que sea BF la altura del triángulo ABC, N y M los puntos de tangencia de la circunferencia, inscrita en el triángulo ABC, con los lados AB y BC, O el centro de la

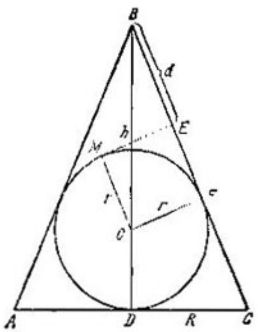

FIG. 201

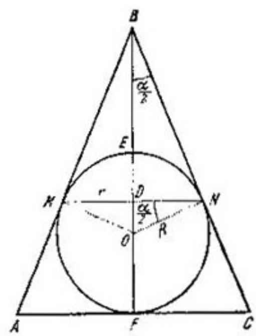

FIG. 202

circunferencia, E el punto de intersección del arco menor MN con el segmento BF, y D el punto de intersección de los segmentos MN y BF (fig. 202). Hagamos $DM=r$, $DE=H$ y $BD=h$. El volumen buscado será

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h-\frac{1}{3}\pi H^2(3R-H).$$

Pero,

$$h=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=R\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=R\,\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

y

$$H=R-R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2};$$

por consiguiente,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}-\left(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

491. Designemos por r y r_1 los radios de las esferas y examinemos la sección de las esferas por un plano que pasa por sus centros O y O_1; sea $AA_1=2a$, $KS=R$ y $AS=x$ (fig. 203); entonces $A_1S=2a-x$. La superficie total de la lente es igual a

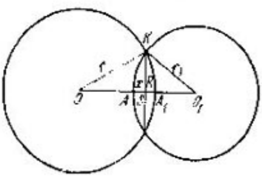

FIG. 203

$$2xar_1+(2a-x)\,2ar=S. \qquad (1)$$

Del triángulo OKS tenemos que

$$r^2=R^2+[r-(2a-x)]^2$$

o bien

$$R^2-2r\,(2a-x)+(2a-x)^2=0. \qquad (2)$$

Análogamente, del triángulo O_1KS tenemos que

$$r_1^2=R^2+(r_1-x)^2$$

o bien

$$R^2-2r_1x+x^2=0. \qquad (3)$$

De (2) y (3) hallamos:

$$r=\frac{R^2+(2a-x)^2}{2\,(2a-x)}, \qquad r_1=\frac{R^2+x^2}{2x}. \qquad (4)$$

Colocando estas expresiones para r y r_1 en la igualdad (1), obtendremos la ecuación

$$\pi\,(R^2+x^2)+\pi\,[R^2+(2a-x)^2]=S$$

o bien

$$x^2-2ax+R^2+2a^2-\frac{S}{2\pi}=0,$$

de donde

$$x=a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}. \qquad (5)$$

Colocando este valor de x en la fórmula (4), después de las simplificaciones correspondientes, obtenemos:

$$r=\frac{\frac{S}{4\pi}-a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a-\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}},$$

$$r_1=\frac{\frac{S}{4\pi}+a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}.$$

La elección de otro signo delante de la raíz cuadrada en (5) se reduce al cambio de las designaciones r y r_1.

492. Sean V_1 y V_2 respectivamente los volúmenes de los segmentos esféricos menor y mayor, en los que el plano, que pasa por la línea de tangencia de la esfera con el cono, divide a la esfera. Sea, a continuación, R el radio de la esfera, h la altura del segmento menor, H la altura del cono, y r el radio de su base (fig. 204). Entonces

$$V_1=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h),\qquad V_2=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{\pi}{3}h^2(3R-h).$$

El problema se reduce a la determinación de la relación $\frac{h}{R}$. Designando por α el ángulo formado por el eje del cono y la generatriz, del $\triangle PKO$ hallamos:

$$\frac{R-h}{R}=\operatorname{sen}\alpha,$$

de donde

$$\frac{h}{R}=1-\operatorname{sen}\alpha.$$

A continuación, según la condición del problema

$$k=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2H}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{4}\frac{r^2H}{R^3}.$$

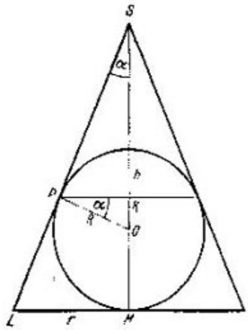

FIG. 204

Expresemos ahora r y H en función de R y α. Tenemos:

$$H=\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}+R=R\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$r=H\operatorname{tg}\alpha=R\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$k=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^3}{\operatorname{sen}\alpha\,(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\,(1-\operatorname{sen}\alpha)}.$$

Sustituyendo aquí $\operatorname{sen}\alpha=1-\frac{h}{R}$ obtenemos una ecuación respecto a $\frac{h}{r}=z$:

$$k=\frac{1}{4}\frac{(2-z)^2}{(1-z)z}$$

o, después de las simplificaciones correspondientes,

$$z^2(4k+1)-4(k+1)z+4=0.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$z_{1,2}=\frac{2(k+1)\pm2\sqrt{k(k-2)}}{4k+1}. \tag{1}$$

Definitivamente hallamos:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{z_{1,2}^2(3-z_{1,2})}{4-z_{1,2}^2(3-z_{1,2})}.$$

El problema tiene dos soluciones, puesto que, siendo $k>2$, ambas raíces de la ecuación cuadrada tienen sentido.

493. El radio r de cada una de las ocho esferas inscritas lo hallaremos examinando el triángulo AOC en el plano que pasa por los centros de estas esferas y el centro O de la esfera S (fig. 205, a). Tenemos:

$$\frac{AB}{AO}=\frac{r}{R-r}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}.$$

De aquí

$$r=R\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}+1}.$$

Trazando una sección que pase por el centro O de la esfera S, el centro O_1 de la esfera S_1 y los centros de las dos esferas opuestas de radio r (fig. 205, b),

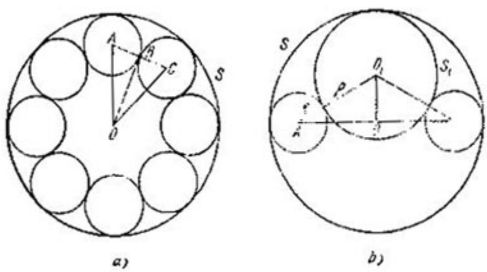

FIG 205

del triángulo rectángulo AOO_1, obtendremos:

$$AO_1^2=AO^2+OO_1^2$$

o bien

$$(r+\rho)^2=(R-r)^2+(R-\rho)^2.$$

De aquí

$$\rho=R\cdot\frac{R-r}{R+r},$$

o bien

$$\rho=R\cdot\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}+1}=\frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}.$$

494. Puesto que las esferas inscritas son iguales entre sí, sus centros equidistan del centro O de la esfera S. Por consiguiente, el centro de simetría del cubo indicado en las condiciones del problema coincide con el centro O de la esfera S (fig. 206). Sea x el radio buscado de las esferas. Es fácil ver, que entonces la arista del cubo será $AB=2x$, y la mitad de la diagonal del cubo

$$AO=CO-CA=R-x.$$

Puesto que, por otro lado,

$$AO=\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{3},$$

obtenemos la ecuación

$$R-x=x\sqrt{3},$$

de donde

$$x=\frac{R}{\sqrt{3}+1}.$$

495. Supongamos que sea r el radio de la base de cada uno de los dos conos inscritos. Su parte común se compone de dos conos truncados iguales. Designemos por r_1 y r_2 los radios de las bases superior e inferior respectivamente del cono truncado y por H su altura. La relación buscada de los volúmenes es

$$q=\frac{H\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)}{2R^3}.$$

De la semejanza de los triángulos AQZ, AOS y APC (fig. 207) tenemos:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{R-H}{R} \quad \text{y} \quad \frac{r_2}{r}=\frac{R}{h}.$$

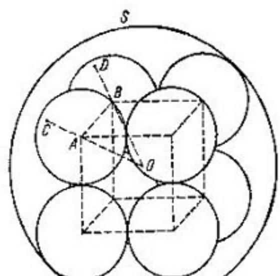

FIG. 206

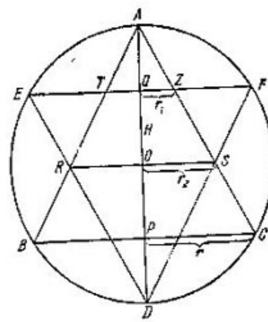

FIG 207

Puesto que, además, $H=h-R$ y $r=\sqrt{R^2-H^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$, las dos igualdades anteriores permiten expresar r_1 y r_2 en función de R y h:

$$r_2=\frac{R\sqrt{2Rh-h^2}}{h}, \qquad r_1=r_2\frac{2R-h}{R}.$$

Ya que de la condición del problema $\frac{h}{R}=k$, entonces

$$q=\frac{(h-R)\left\{r_2^2\,\frac{(2R-h)^2}{R^2}+r_2^2\,\frac{2R-h}{R}+r_2^2\right\}}{2R^3}=$$

$$=\frac{1}{2}(k-1)\left(\frac{2}{k}-1\right)(k^2-5k+7).$$

496. Supongamos que los radios de las secciones circulares con las áreas S_1 y S_2 sean iguales a R_1 y R_2, y que las distancias desde el centro de la esfera hasta dichas secciones sean respectivamente iguales a l_1 y l_2 $(l_1<l_2)$. Designemos por R el radio de la esfera, por r el radio de la sección buscada y por l la distancia desde esta sección hasta el centro de la esfera. Entonces, (fig. 208),

$$l_2-l_1=d \tag{1}$$

y

$$l_1^2+R_1^2=l_2^2+R_2^2=R^2.$$

De estas dos ecuaciones hallamos:

$$l_2+l_1=\frac{R_1^2-R_2^2}{d}$$

y, por consiguiente,

$$l_2+l_1=\frac{S_1-S_2}{\pi d}. \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$l_2=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}+\frac{d}{2}, \qquad l=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}.$$

Por esta razón, el área buscada es

$$S=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi(R_2^2+l_2^2-l^2)=\frac{1}{2}\left(S_1+S_2+\frac{1}{2}\pi d^2\right).$$

497. Designemos por r el radio buscado de la base del cono. Examinemos la figura obtenida en la sección trazada por el centro de una de las esferas y

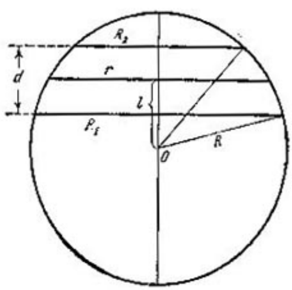

FIG. 208

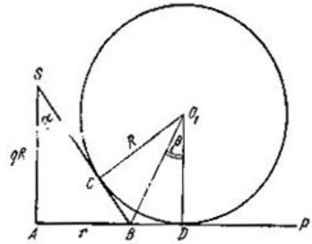

FIG. 209

el eje del cono (fig. 209). Observemos que la distancia entre los centros de dos circunferencias en contacho es igual a $2R$. Valiéndonos del hecho, fácil de demostrar, de que el centro de la base del cono A equidista de los tres puntos de tangencia de las esferas con el plano P, hallamos:

$$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Es fácil ver, que el $\angle SBA=\angle CO_1D=2\beta$ y, por consiguiente,

$$2\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Tomando las tangentes de los ángulos que figuran en ambas partes de esta igualdad, obtenemos:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}. \qquad (1)$$

De la fig. 209 está claro que $\mathrm{tg}\,\beta=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R-r\right):R$ y que $\mathrm{tg}\,\alpha=r:qR$.

Si, ahora, hacemos $\frac{r}{R}=x$, la igualdad (1) nos dará la siguiente ecuación respecto a x:

$$3(q-2)x^2-4\sqrt{3}(q-1)x+q=0.$$

De aquí, siendo $q=2$, obtenemos que $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$, por consiguiente, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}R$. Si $q\neq 2$, entonces

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}(q-1)\mp\sqrt{9q^2-18q+12}}{3(q-2)}.$$

Dado que $0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$, entonces, en la fórmula indicada debe tomarse el signo menos. Siendo $q>2$, la segunda raíz, como es fácil demostrar, es mayor que $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, y responde al cono que tiene contacto exterior con las esferas; cuando $q<2$, la segunda raíz es negativa.

498. Los centros de las cuatro primeras esferas se encuentran en los vértices de un tetraedro regular, puesto que la distancia entre los centros de dos esferas cualesquiera en contacto es igual a $2R$. No es difícil demostrar que los centros

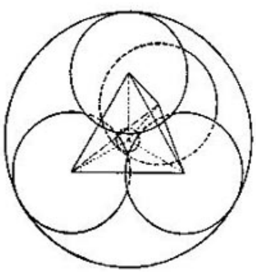

FIG. 210

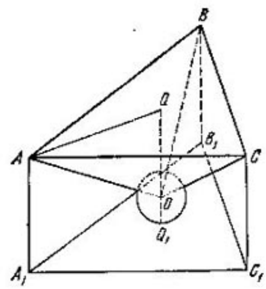

FIG. 211

de la quinta y sexta esferas coinciden con el centro de gravedad del tetraedro (fig. 210). Sea r el radio de la quinta esfera (la mayor), y ρ el radio de la sexta esfera. Es evidente, que

$$r=\rho+2R. \qquad (1)$$

Valiéndonos de que la distancia desde el centro de gravedad hasta el vértice del tetraedro que se examina es igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, obtenemos:

$$\rho+R=\frac{\sqrt{6}}{2}R. \qquad (2)$$

De aquí

$$\rho=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right),$$

y de la fórmula (1)

$$r=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right).$$

Así pues, la relación buscada de los volúmenes es

$$\frac{V_6}{V_5}=\left(\frac{\rho}{r}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3=(5-2\sqrt{6})^3=485-198\sqrt{6}.$$

499. Supongamos que sean A, B y C los centros de las esferas de radio R, A_1, B_1 y C_1 las proyecciones de estos centros sobre el plano, O el centro de la cuarta esfera, el radio r de la cual hace falta hallar (fig. 211). Uniendo los centros de todas las esferas obtendremos, evidentemente, la pirámide triangular regular $OABC$, en la cual $AB=BC=AC=2R$, $AO=BO=CO=R+r$, y $OQ=R-r$. El segmento AQ es el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, por lo tanto,

$$AQ=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Del triángulo AQO, por el teorema de Pitágoras, hallamos:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2=(R+r)^2.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $r=\frac{R}{3}$.

500. Sean A, B, C y D los centros de las esferas grandes. Examinemos la proyección de todas las esferas al plano A, B, C y D (fig. 212). Dado que los centros de las esferas pequeñas equidistan de los centros de las respectivas esferas grandes, se proyectarán a los centros de gravedad O_1 y O_2 de los triángulos equiláteros ABC y BCD. Puesto que, además, los radios de las esferas

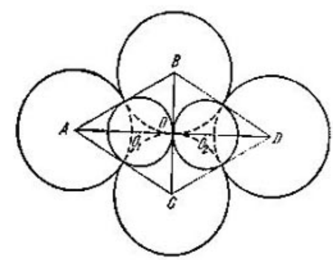

FIG. 212

pequeñas, según la condición del problema, son iguales, el segmento que une sus centros es paralelo al plano que se examina y se divide por el punto de tangencia de las esferas en dos mitades. En virtud de esto, la proyección del punto de tangencia resultará sobre el segmento BC. De aquí se deduce que las esferas pequeñas se proyectarán en circunferencias inscritas en los triángulos ABC y BCD. Por esta razón, el radio de las esferas pequeñas es

$$r=\frac{AB\sqrt{3}}{6}=\frac{2R\sqrt{3}}{6},$$

de donde

$$\frac{R}{r}=\sqrt{3}.$$

2. Problemas de demostración

501. Sean E y F los puntos medios de las bases del trapecio $ABCD$ obtenido en la sección axial del cono (fig. 213). Tracemos por el punto medio O del segmento EF las rectas $OM \perp CD$, $ON \perp EF$ y $CP \perp AD$ Hagamos, para simplificar la escritura, $CD=l$, $EF=h$, $OM=x$, $EC=r$, $DF=R$, y $\angle MON=\angle PCD=\alpha$.

Para la demostración, es suficiente establecer que $x=\frac{h}{2}$ Según la condición del problema, $\pi l(R+r)=\pi l^2$ y, por consiguiente, $R+r=l$. Sin embargo, puesto que de los triángulos OMN y CPD tenemos que

$$x=\frac{R+r}{2}\cos\alpha \quad \text{y} \quad h=l\cos\alpha,$$

entonces, $x=\frac{h}{2}$, lo que era necesario demostrar*).

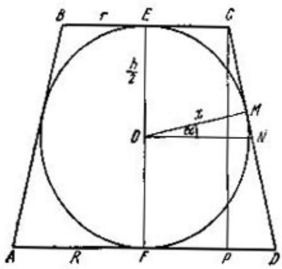

FIG. 213

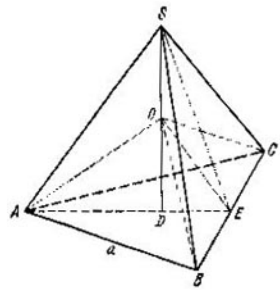

FIG. 214

502. Examinemos el trapecio $ABCD$ que se obtiene en la sección axial del cono (véase la fig. 213). Sean E y F los puntos medios de sus bases y O el punto medio del segmento EF.

$$OM \perp CD,\ ON \perp EF,\ CP \perp AD,\ \text{y}\ \angle MON=\angle PCD=\alpha.$$

Para la resolución del problema es suficiente demostrar que $OM=OE$. Introduzcamos las denotaciones:

$$EC=r, \quad DF=R, \quad OM=x, \quad OE=\frac{h}{2}.$$

Entonces,

$$x=ON\cos\alpha=\frac{R+r}{2}\cos\alpha.$$

Del triángulo CPD tenemos:

$$h=CD\cos\alpha=\sqrt{(R-r)^2+CP^2}\cos\alpha.$$

---

*) De la igualdad obtenida más arriba $R+r=l$ se desprende que $2R+2r=l+l$. Esto significa que las sumas de los lados opuestos del cuadrilátero examinado son iguales. Esto último, ya es suficiente para que en el cuadrilátero se pueda inscribir una circunferencia. Sin embargo, nosotros no nos basamos en este hecho.

Pero, puesto que según la condición del problema $CP^2 = 4Rr$, entonces,

$$h = \sqrt{(R-r)^2 + 4Rr}\cos\alpha = (R+r)\cos\alpha.$$

Así pues, $x = \dfrac{h}{2}$, lo que era necesario demostrar.

503. Sea SD la altura de la pirámide $SABC$, O el punto medio de la altura, y E el punto medio del segmento BC cuya longitud designaremos por a (fig. 214).

Tenemos:

$$DE = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$SD = \sqrt{SE^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$OD = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

De aquí,

$$OE = \sqrt{OD^2 + DE^2} = \frac{a}{2}.$$

Por consiguiente, $OE = BE = EC$ y, por lo tanto, $\angle BOC = 90°$

504. Sea a el lado de la base de la pirámide dada $SABCD$, α el ángulo diedro formado por la cara lateral y la base, y H la altura SO de la pirámide (fig. 215). Entonces,

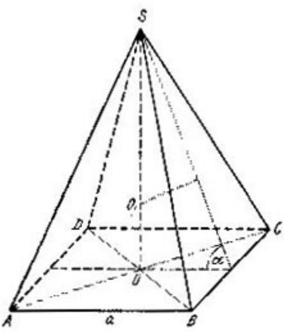

FIG 215

$$r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Además (véase la fórmula (I) en la resolución del problema 481),

$$R = \frac{H^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2H}.$$

Por consiguiente,

$$R = \frac{a}{4}\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}{\operatorname{tg}\alpha}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Haciendo $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$, obtenemos:

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + x^4}{2x^2(1 - x^2)}.$$

Suponiendo, además, que sea $x^2 = t$, reduciremos el problema a la demostración de la desigualdad

$$\frac{1 + t^2}{2t(1-t)} \geqslant 1 + \sqrt{2} \quad \text{siendo } 0 < t < 1.$$

Multiplicando ambas partes de la desigualdad por el denominador y abriendo los paréntesis, obtenemos la desigualdad

$$(2\sqrt{2}+3)t^2-2(\sqrt{2}+1)t+1 \geqslant 0$$

para un trinomio cuadrado. Calculando el descriminante del trinomio, descubrimos que es igual a cero. Por consiguiente, el trinomio no varía de signo cualesquiera que sean los valores de t. Puesto que siendo $t=0$ el trinomio es positivo, la desigualdad queda demostrada.

505. Las pirámides $ASBC$ y $OSBC$ tienen la base SBC común (fig. 216), por lo cual sus volúmenes son entre sí como las alturas bajadas a su base común. Puesto que $OA' \parallel AS$, la relación de las alturas de las pirámides $ASBC$ y $OSBC$, bajadas a la base

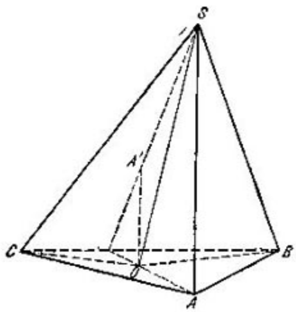

FIG. 216

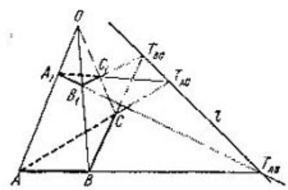

FIG. 217

SBC, es igual a la relación de SA a OA'. Por consiguiente, la relación de sus volúmenes es

$$\frac{V_{OSBC}}{V_{ASBC}}=\frac{OA'}{SA}.$$

Análogamente,

$$\frac{V_{OSCA}}{V_{ASBC}}=\frac{OC'}{SC}, \quad \frac{V_{OSAB}}{V_{ASBC}}=\frac{OB'}{SB}.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1.$$

506. Sea P el plano del triángulo ABC, P_1 el plano del triángulo $A_1B_1C_1$, y l la línea de intersección de P con P_1 (fig. 217). Designemos por Q_{AB} el plano que pasa por A, B y O. La recta A_1B_1 se encuentra en el plano Q_{AB} y, siendo no paralela a la recta AB, se cruza con ésta en el punto T_{AB}. Este punto se encuentra en los planos P y P_1 y, por lo tanto, sobre la recta l. Análogamente, demostraremos que las rectas BC y B_1C_1 se cruzan en el punto T_{BC} que se encuentra sobre l, y las rectas AC y A_1C_1 se intersecan en el punto T_{AC} que se encuentra también sobre l.

507. Sea O_1 el centro de gravedad de la cara ASC, y BO_1 uno de los segmentos examinados en el problema. Tomemos otra cara cualquiera, por ejemplo, la BSC; designemos su centro de gravedad por O_2 y demostremos que el segmento AO_2 intersecará al segmento BO_1 y que el punto de intersección de estos segmentos O divide al segmento BO_1 en la relación de 1:3, contando desde el punto O_1. En efecto, si M_1 y M_2 son los puntos medios de los segmentos AC y BC (fig. 218), entonces, es evidente que $AB \parallel M_1M_2$; es fácil también ver que $O_1O_2 \parallel M_1M_2$, ya que los puntos O_1 y O_2 dividen respectivamente a los segmentos M_1S y M_2S en una misma relación. Por esta razón, $AB \parallel O_1O_2$, la figura ABO_2O_1 es un trapecio y, por lo tanto, sus diagonales BO_1 y AO_2 se intersecarán. Designemos el punto de intersección de las diagonales por O. Tenemos:

$$\frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{2}; \quad \frac{O_1O_2}{M_1M_2}=\frac{2}{3}.$$

Multiplicando estas igualdades entre si obtendremos que

$$\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Pero, de la semejanza de los triángulos AOB y O_1OO_2 se desprende que

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{O_1O_2}{AB}.$$

Así pues,

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{1}{3},$$

lo que se afirmaba. Si tomamos, ahora, el centro de gravedad en una cara más y trazamos el segmento correspondiente, entonces, en virtud de lo demostrado, éste también intersecará al segmento BO_1 y, además, en el punto que dividirá a BO_1 en la relación de 1:3, es decir, en el punto O. Por consiguiente, todos los segmentos examinados se intersecan en el punto O. Es también evidente, que el punto O divide a cada uno de estos segmentos en la relación de 1:3, lo que había que demostrar.

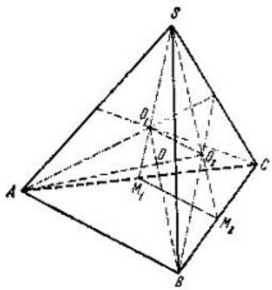

FIG 218

508. Desarrollemos primeramente un razonamiento auxiliar. Supongamos que sean PP_1 y QQ_1 dos rectas que se cruzan, A, B y C tres puntos sobre la recta QQ_1, con la particularidad de que el punto B se encuentre entre los puntos A y C, A_1, B_1 y C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos A, B y C a la recta PP_1. Designemos por h_A, h_B y h_C las distancias desde los puntos A, B y C hasta la recta PP_1. Demostremos que h_B es, por lo menos, menor que una de las distancias h_A o h_C.

Con este fin, proyectemos la figura representada en la fig. 219 sobre el plano π perpendicular a la recta PP_1. La recta PP_1 tendrá como proyección el punto O, mientras que los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 se proyectan sin variar su longitud, puesto que todos ellos son paralelos al plano π. En este caso, el punto B' resulta entre los puntos A' y C'. Examinando ahora el triángulo $A'OC'$ podemos confirmar que la línea inclinada OB' es menor que una de las líneas inclinadas OA' o OC'. En efecto, bajando desde el punto O una perpendicular a $A'C'$ (en la fig. 219 no se muestra), estableceremos que el punto B' está dispuesto más cerca del pie de la perpendicular que uno de los dos puntos A' o C'. De aquí se desprende que h_B es menor que h_A o que h_C.

Sea, ahora, $ABCD$ una pirámide triangular arbitraria, y EFG una sección triangular tal, que, por lo menos, uno de los vértices F no es vértice de la pirámide. Demostremos que, entonces, el área del triángulo EFG es menor que el área de uno de los triángulos AEG o DEG (fig. 220).

En efecto, los tres triángulos tienen el lado EG común y, según lo demostrado anteriormente, la distancia desde F hasta la recta EG es menor que la distancia desde A o D hasta esta misma recta. Si $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle AEG}$, entonces todo queda demostrado. Pero, si $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle DEG}$ y, por ejemplo, el punto E no es vértice de la pirámide, entonces, hacemos uso del razonamiento anterior para el $\triangle DEG$, comparando su área con las áreas de los triángulos DGA y BDG. Valiéndonos, en caso de necesidad, una vez más del mismo razonamiento para el $\triangle BDG$, demostremos la afirmación hecha en el problema. De la resolución expuesta, está claro, que si la sección de la pirámide no coincide con su cara, entonces, su área es estrictamente menor que el área de una de las caras.

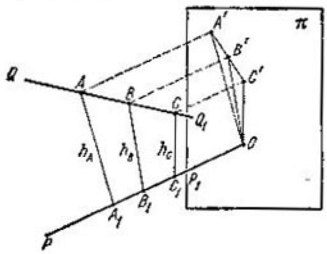

FIG. 219

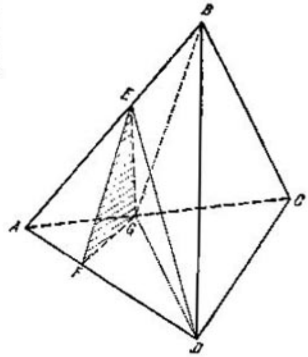

FIG. 220

509. En vez de comparar las sumas de los ángulos planos de los vértices S y S', comparemos entre sí las sumas de los ángulos planos de las caras laterales de ambas pirámides en cada uno de los tres vértices de la base común. Demostremos que cada una de estas sumas de los ángulos de la pirámide exterior es mayor que la suma correspondiente de los angulos de la pirámide interior. Demostremos, por ejemplo, que (fig. 221)

$$\angle ACS + \angle SCB > \angle ACS' + \angle S'CB. \quad (1)$$

De la desigualdad (1) y otras análogas (para los vértices A y B) obtendremos la solución del problema. En efecto, sumando las tres desigualdades indicadas, estableceremos que la suma $\sum$ de todos los seis ángulos planos de las caras laterales en la base de la pirámide exterior es mayor que la suma correspondiente $\sum'$ para la pirámide interior:

$$\sum > \sum'. \quad (2)$$

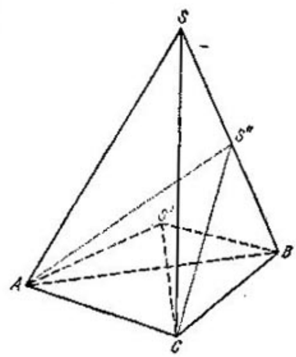

FIG 221

Pero, las magnitudes que nos interesan en el problema suplementan a $\sum$ y $\sum'$ hasta 540° (= 180°·3) y, por consiguiente, para ellas tiene lugar la desigualdad de sentido contrario. Así pues, nos queda demostrar la validez de (1). Prolonguemos el plano ACS' hasta su intersección con la pirámide exterior. Examinando el ángulo triédrico $CS'S''B$, deducimos que

$$\angle S'CS'' + \angle S''CB > \angle S'CB. \quad (3)$$

Adicionando a ambas partes de la desigualdad el $\angle ACS'$, obtendremos:

$$\angle ACS'' + \angle S''CB > \angle ACS' + \angle S'CB. \quad (4)$$

Pero, para el ángulo triédrico $CASS''$ tenemos:

$$\angle ACS + \angle SCS'' > \angle ACS''. \quad (5)$$

Sustituyendo en la desigualdad (4) al $\angle ACS''$ por una magnitud mayor, de acuerdo con (5), obtendremos:

$$\angle ACS+(\angle SCS''+\angle S''CB)>\angle ACS'+\angle S'CB,$$

es decir, la desigualdad (1).

510. Designemos por O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de las esferas dadas, y por P_{ik} el plano tangente común para las esferas de centros O_i y O_k $(i<k)$. Tales planos son en total seis: P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24} y P_{34}.

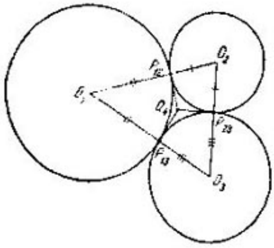

FIG. 222

Demostremos primeramente que los planos P_{12}, P_{13} y P_{23} se cruzan por una recta. En efecto, cada uno de estos planos es perpendicular al plano $O_1O_2O_3$, puesto que éste es perpendicular a la línea de los centros de las esferas divididas por el mismo, que se encuentra sobre este plano.

Además, es fácil ver que los planos que se examinan (fig. 222) pasan por el punto O_4 de intersección de las bisectrices del triángulo $O_1O_2O_3$. Así pues, los planos P_{12}, P_{13} y P_{23} se cruzan, en efecto, por cierta recta que, como hemos establecido de paso, es perpendicular al plano de los centros $O_1O_2O_3$ y pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $O_1O_2O_3$. Designemos esta recta por L_4.

Análogamente se demuestra que los planos P_{23}, P_{24} y P_{34} determinan la recta común para ellos L_1 perpendicular al plano del triángulo $O_2O_3O_4$, que

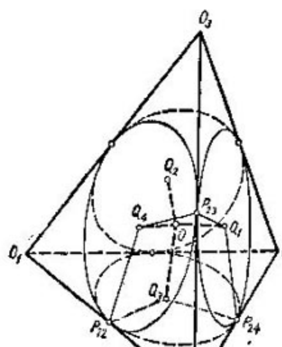

FIG. 223

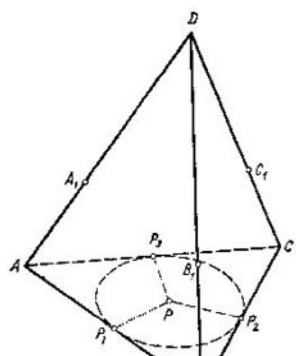

FIG. 224

pasa por el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo, y así sucesivamente. Como resultado llegamos al siguiente problema (fig. 223): en cada cara de la pirámide triangular $O_1O_2O_3O_4$ hay inscrita una circunferencia por cuyo centro pasa la perpendicular a la cara. Es necesario demostrar que las cuatro perpendiculares L_1, L_2, L_3 y L_4 tienen un punto común, si se sabe que los puntos de contacto de dos circunferencias con una misma arista coinciden.

Este hecho es casi evidente. Designemos por O el punto de intersección de las rectas L_1 y L_4; estas últimas se intersecan, puesto que se encuentran en un mismo plano P_{23} y no son paralelas. Demostremos, ahora, que las rectas

L_3 y L_2 pasan también por el punto O. En efecto, el punto O se encuentra en la línea de intersección de los planos P_{12} y P_{24}, puesto que la recta L_4 pertenece al plano P_{12}, y la recta L_1, al plano P_{21}. Pero, la línea de intersección de P_{12} con P_{24} es la recta L_3. Por consiguiente, L_3 pasa por el punto O. Análogamente demostramos que la recta L_2 pasa por el punto O

511. Si se conocen tres puntos A, B y C no pertenecientes a una misma recta, entonces, estos puntos son los centros de tres esferas que hacen contacto entre sí de dos en dos. En efecto, si P es el punto de intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$, y P_1, P_2 y P_3 son los pies de las perpendiculares bajadas desde P respectivamente a los lados AB, BC y CA, entonces,

$$AP_1 = AP_3, \quad BP_1 = BP_2, \; CP_2 = CP_3$$

y las esferas de centros A, B y C, cuyos radios son respectivamente iguales a

$$r_A = AP_1, \quad r_B = BP_2, \quad r_C = CP_3,$$

hacen contacto entre sí de dos en dos.

Sea $ABCD$ la pirámide dada (fig. 224). Examinemos las tres esferas de radios r_A, r_B y r_C, cuyos centros son A, B y C y que hacen contacto entre sí de dos en dos. Designemos por A_1, B_1 y C_1 los puntos en los cuales las superficies de las esferas se cruzan con las aristas AD, BD y CD, y demostremos que

$$A_1D = B_1D = C_1D.$$

Según la condición del problema

$$AD + BC = BD + AC.$$

De acuerdo con la construccion tenemos que

$$AD = r_1 + A_1D; \quad BC = r_B + r_C;$$
$$BD = r_B + B_1D; \quad AC = r_A + r_C.$$

Colocando las últimas cuatro expresiones en la igualdad anterior, obtendremos:

$$A_1D = B_1D.$$

Análogamente, valiéndonos de la igualdad

$$BD + AC = CD + AB,$$

hallaremos:

$$B_1D = C_1D.$$

Por consiguiente, la esfera de centro D y de radio

$$r_D = A_1D = B_1D = C_1D$$

hace contacto con cada una de las tres primeras esferas y, por lo tanto, las cuantro esferas construidas hacen contacto entre sí de dos en dos

512. Designemos los radios de las esferas por r_1, r_2 y r_3, y sea $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Tracemos un plano tangente a las dos primeras esferas. Además, tracemos por los centros de estas esferas un plano perpendicular al plano tangente y examinemos la circunferencia de radio r que hace contacto con las dos circunferencias grandes obtenidas en la sección y con su recta tangente común (fig. 225). La tercera esfera puede, evidentemente, hacer contacto con las dos primeras esferas y con el plano que tiene contacto con ellas, si esta esfera "no es demasiado pequeña", a saber, si $r_3 \geqslant r$. Tenemos (fig. 225) que

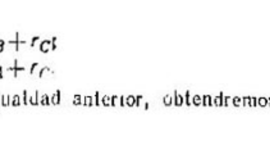

FIG. 225

$$\sqrt{O_1O_2^2 - O_1C^2} = AO + OB$$

o bien

$$\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{(r_1+r)^2-(r_1-r)^2}+\sqrt{(r_2+r)^2-(r_2-r)^2}.$$

De esta ecuación, hallaremos:

$$r=\frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}.$$

Por consiguiente, los radios de las esferas deberán satisfacer la relación

$$r_3 \geqslant \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$$

513. Supongamos que el número de caras laterales de la pirámide sea igual a n. Unamos el punto arbitrario O, tomado en el plano de su base, con todos los vértices y examinemos n pirámides triangulares con un vértice común en el punto O. Es evidente que el volumen V de la pirámide dada es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides triangulares obtenidas. Tenemos:

$$V=\frac{1}{3} S(r_1+r_2+\ldots+r_n),$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las distancias desde el punto O hasta las caras laterales, y S el área de la cara lateral.

Por consiguiente, $r_1+r_2+\ldots+r_n=\frac{3V}{S}$ es una magnitud constante que no depende de la posición del punto O en el plano de la base, lo que era necesario demostrar.

514. Examinemos los dos planos sombreados en la fig. 226 y el triángulo ADE en el plano P que pasa por los vértices A, D, H y E del paralelepípedo dado. El plano P corta al plano del $\triangle BCD$ por la recta KD que pasa por

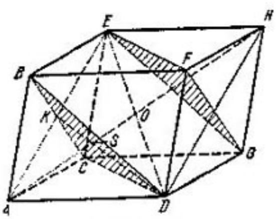

FIG. 226

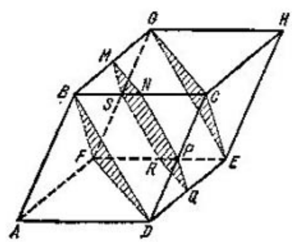

FIG. 227

el punto K de intersección de las diagonales del paralelepípedo $ABEC$, y, por consiguiente, el segmento KD es una mediana del $\triangle AED$. Es evidente, que AO es también una mediana del $\triangle AED$. Por esta razón, el punto S que nos interesa, es el punto de intersección de las medianas del $\triangle AED$ y, por lo tanto,

$$AS=\frac{2}{3} AO=\frac{1}{3} AH,$$

con lo cual el problema queda demostrado.

515. Tracemos el plano indicado en el problema por los vértices B, D y F (fig. 227) y otro plano, paralelo al primero, por los vértices C, E y G. Ambos planos forman en su intersección con el paralelepípedo triángulos equiláteros iguales. Designemos la longitud de cado lado de estos triángulos por a. Si, ahora, trazamos por el punto medio de una de las seis aristas que unen los vértices de los dos triángulos mencionados, por ejemplo, por el punto medio N de la arista BC, un plano paralelo a los planos indicados, éste dará en la sección con el paralelepípedo el hexágono $MNPQRS$, todos los lados del cual, evidentemente, resultarán iguales a $\frac{a}{2}$. Observemos, además, que $MN \parallel DF$ y $NP \parallel BD$. Por esta razón, el $\angle MNP$ complementa al $\angle BDF$ hasta 180° y, por consiguiente, el $\angle MNP = 120°$. Análogamente establecemos que los demás ángulos del hexágono son también iguales a 120°.

516. Sea $SABC$ el tetraedro dado, P y Q los puntos medios de las aristas opuestas AC y SB, $MPNQ$ cierta sección del tetraedro en la que se encuentra el segmento PQ (fig. 228). Examinemos la sección plana SPB que, evidentemente, divide al tetraedro en dos partes equidimensionales. El problema quedará solucionado si demostramos que las pirámides $SPQN$ y $MPQB$ son equidimensionales.

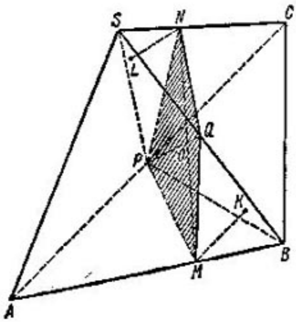

FIG. 228

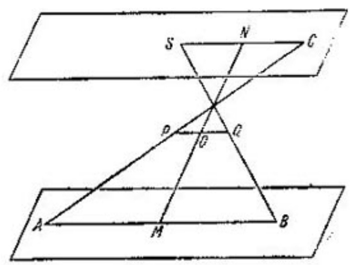

FIG. 229

Bajemos sobre el plano SPB las perpendiculares desde los puntos M y N y designemos sus pies respectivamente por K y L. Puesto que los triángulos PQB y SPQ son equidimensionales, entonces, para resolver el problema es suficiente demostrar que $LN = MK$. Estableceremos esta igualdad al demostrar que

$$MO = NO. \qquad (1)$$

Examinemos, con este fin, un par de planos paralelos en los que se encuentran las rectas que se cruzan SC y AB (fig. 229). Dado que el segmento PQ une los puntos medios de los segmentos AC y SB, él, evidentemente, está dispuesto en un plano paralelo a los planos dados y que equidista de éstos. En virtud de esto, el segmento MN, al intersecarse con el segmento PQ, será dividido por el punto de intersección por la mitad.

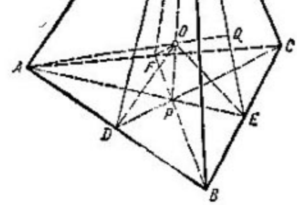

FIG. 230

517. Sea $SABC$ la pirámide dada (fig. 230). Bajemos desde el vértice S la altura SP de la cara ABC, y las alturas SD, SE y SF de las tres caras restantes. Es fácil ver, que los triángulos SPD, SPE y SPF, en virtud de la igualdad de los ángulos SDP, SEP y SFP, son iguales entre sí (compárese con el problema 458). Tracemos, a continuación, por las aristas AB, BC y AC planos que dividan los correspondientes ángulos diedros por la mitad. Estos planos se intersecan en el punto O equidistante de las cuatro caras de la pirámide y, por consiguiente, que es el centro de la esfera inscrita en la pirámide. Es fácil ver, que en el caso que se examina, en virtud de la igualdad indicada de los triángulos, el punto O resultará sobre la altura SP de la pirámide. Repitiendo los razonamientos, estableceremos que todas las alturas de la pirámide se intersecan en el punto O. Valiéndonos de este hecho, podemos afirmar que, por ejemplo, los triángulos APS y SPE se encuentran en un mismo plano y, por consiguiente, los segmentos AP y PE pertenecen a una misma recta. Por eso, AE es simultáneamente la bisectriz y la altura del $\triangle ABC$. Por la misma causa, las demás bisectrices del $\triangle ABC$ son al mismo tiempo sus alturas. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ es equilátero. Repitiendo los razonamientos, estableceremos que todas las caras de la pirámide representan triángulos equiláteros, con lo cual el problema queda demostrado.

518. Supongamos que el segmento AB se encuentra en el plano Q, y el segmento CD, en el plano P, y sea $P \| Q$ (fig. 231). Tracemos por el punto A una recta paralela a CD y tracemos el segmento $AA_1 = CD$. A base de los lados

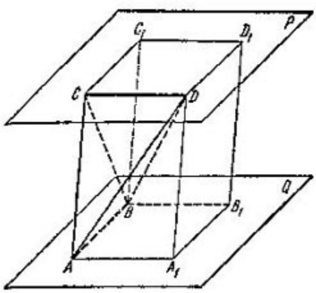

FIG 231

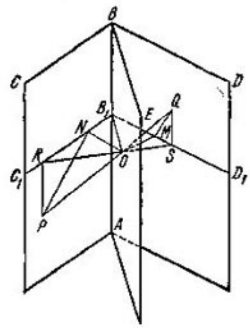

FIG. 232

AB y AA_1 construyamos el paralelogramo ABB_1A_1. Realicemos una construcción análoga en el plano P. Uniendo A con C, B con C_1, A_1 con D y B_1 con D_1 obtendremos el paralelepípedo $ABB_1A_1DCC_1D_1$. Examinando la cara ACB como base de la pirámide $DACB$, observamos que el volumen de la pirámide es igual a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo. Puesto que, sin embargo, el volumen del paralelepípedo no varía al trasladar los segmentos (no varían ni el área de la base ABB_1A_1, ni la altura, es decir, la distancia entre los planos P y Q), entonces, tampoco varía el volumen de la pirámide.

519. Sean P y Q los puntos de intersección de la recta dada con las caras CBA y DBA del ángulo diedro (fig. 232). Tracemos por la arista AB el plano bisector ABE y, luego, por el punto O de su intersección con la recta PQ, tracemos el plano $C_1B_1D_1$ perpendicular a la arista AB. Sea, a continuación, $OM \perp B_1D_1$, $ON \perp B_1C_1$ y SR la proyección de PQ sobre el plano $D_1B_1C_1$ de tal modo que $QS \perp B_1D_1$ y $PR \perp B_1C_1$. Si los puntos P y Q equidistan de la arista, es decir, si

$$B_1R + B_1S, \qquad (1)$$

entonces, el triángulo B_1RS es isósceles, $SO = RO$ y, por consiguiente, $QO = PO$, como líneas inclinadas que tienen iguales proyecciones. Teniendo en cuenta, además, que según la construcción

$$MO = NO, \qquad (2)$$

podemos deducir que los triángulos OMQ y ONP son rectángulos e iguales. De aquí se desprende la igualdad de los ángulos:

$$\angle MQO = \angle NPO. \qquad (3)$$

Así pues, en un sentido la afirmación queda demostrada.

Si, ahora, al contrario, se cumple la igualdad de los ángulos (3), entonces, en virtud de (2), tiene lugar la igualdad de los triángulos QMO y PNO. Como consecuencia de esto, $QO = PO$ y, por lo tanto, $SO = OR$. De aquí se desprende ya la igualdad (1).

520. Unamos los puntos B y C, A y D con segmentos de rectas (fig. 233). Tracemos por el punto A una recta paralela a MN hasta que se encuentre en el punto K con la recta que pasa por los puntos B y N. Observemos que $AK = 2MN$, puesto que MN es la media del triángulo ABK. Luego,

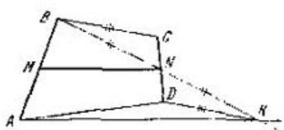

FIG. 233

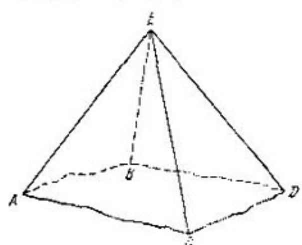

FIG. 234

$\triangle BNC = \triangle KND$, ya que $BN = NK$, $CN = ND$ y $\angle BNC = \angle KND$. Por eso, $DK = BC$. Del triángulo ADK se desprende:

$$DK + AD > AK = 2MN$$

(aquí tiene importancia que D no se encuentra sobre la recta AK, de lo contrario, tendríamos que haber puesto el signo $\geqslant$). Así pues,

$$BC + AD > 2MN,$$

lo que era necesario demostrar.

521. Sean A, B C y D puntos arbitrarios que se encuentran en las aristas del ángulo tetraédrico con el vértice E (fig. 234). Demostremos, por ejemplo, que

$$\angle CED < \angle CEA + \angle AEB + \angle BED. \qquad (1)$$

Tracemos el plano CEB. Según la propiedad de los ángulos planos de un angulo triédrico

$$\angle CED < \angle CEB + \angle BED \qquad (2)$$

y por la misma causa

$$\angle CEB < \angle CEA + \angle AEB. \qquad (3)$$

De las desigualdades (2) y (3) se desprende (1). De este modo, la desigualdad (1) queda demostrada.

Es fácil comprender que nuestro razonamiento conserva su vigor también para el caso cuando el ángulo tetraédrico no es convexo, es decir, cuando la arista ED resulta al otro lado del plano CEB.

522. Supongamos que sea dado el ángulo tetraédrico convexo con el vértice S (fig. 235). Prolonguemos los planos BSC y ASD hasta que se crucen por la recta l_1. Luego, prolonguemos los planos ASB y DSC hasta que se crucen por la recta l_2. Las rectas l_1 y l_2, evidentemente, no coinciden (de lo contrario, todas las caras en su prolongación pasarían por una misma recta). Designemos por P el plano en el que se encuentran las rectas l_1 y l_2. Valiéndonos de la convexidad del ángulo tetraédrico, es fácil demostrar que el plano P tiene solamente un punto común con el ángulo dado, el punto de intersección S, de modo que todo el ángulo se encuentra a un lado del plano P (este hecho es casi evidente). Demostremos, ahora, que todo plano que corte al ángulo tetraédrico y que sea paralelo al plano P, formará en la sección con este ángulo un paralelogramo. En efecto, en virtud de lo expuesto, tal plano cortará a las cuatro aristas del ángulo tetraédrico. Designando los respectivos puntos de

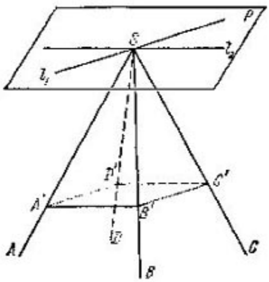

FIG. 235

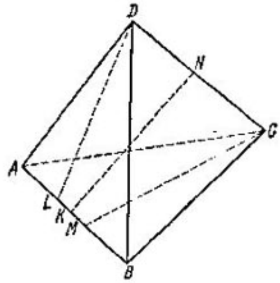

FIG. 236

intersección por A', B', C' y D', observemos que $A'D' \parallel B'C'$, puesto que estos dos segmentos son por separado paralelos a l_1; por la misma causa $A'B' \parallel D'C'$.

Por consiguiente, el cuadrángulo $A'B'C'D'$ es un paralelogramo, lo que era necesario demostrar.

523. Sean DL y CM las alturas de los triángulos ADB y ACB, bajadas a su base común AB (fig. 236). Dado que estos triángulos son equidimensionales, entonces, $DL = CM$. Supongamos, además, que sea KN la perpendicular común a las aristas que se cruzan AB y DC.

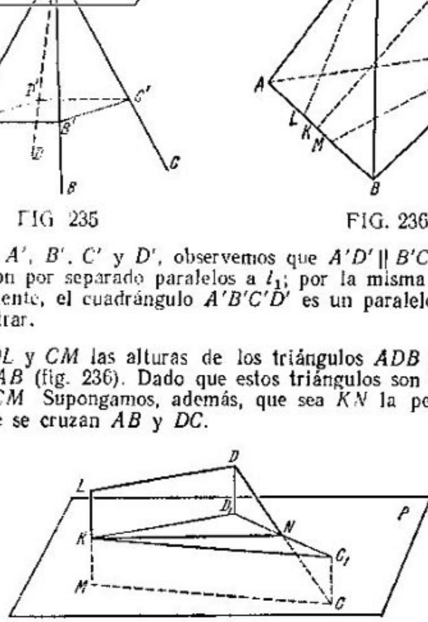

FIG. 237

Tracemos por el segmento KN el plano P perpendicular a la arista AB. Proyectemos el cuadrilátero $LMCD$ sobre el plano P (fig. 237). Puesto que los segmentos DL y CM se proyectan sin que varíen sus longitudes (ambos son paralelos al plano P), y el segmento LM tiene como proyección un punto, en la proyección se obtiene el triángulo isósceles KD_1C_1. Según la construcción tenemos que $KN \perp DC$, por consiguiente, $KN \perp D_1C_1$ y, por lo tanto, KN es la altura del $\triangle KD_1C_1$. Por eso, N es el punto medio del segmento D_1C_1 y, por lo tanto, también del segmento DC.

De este modo, para las condiciones del problema, el pie de la perpendicular común a dos aristas que se cruzan de la pirámide divide a estas aristas por la mitad.

De la fig. 237 es fácil observar que $LK = KM$, puesto que $DD_1 = CC_1$. Por eso (véase la fig. 236) $AL = BM$ y de la igualdad de los triángulos rectángulos ALD y BMC se desprende que

$$AD = BC.$$

Análogamente se demuestra que $AC = BD$ y que $AB = DC$. Por consiguiente, todas las caras son iguales entre sí, como triángulos que tienen tres lados iguales.

3. Lugar geométrico de los puntos

524. Sea P uno de los planos que pasa por el punto dado A, y M la proyección del punto dado B sobre el plano P. Supongamos, a continuación, que sea C el punto medio del segmento AB (fig. 238). Puesto que el triángulo AMB es rectángulo, entonces, $CM = \frac{1}{2} AB$. De este modo, todos los puntos M

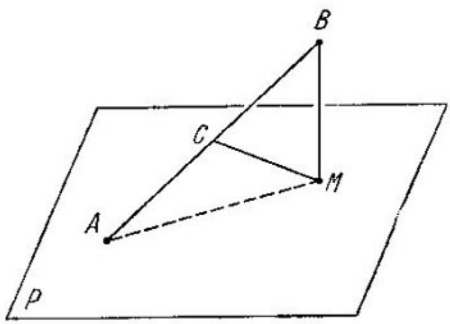

FIG. 238

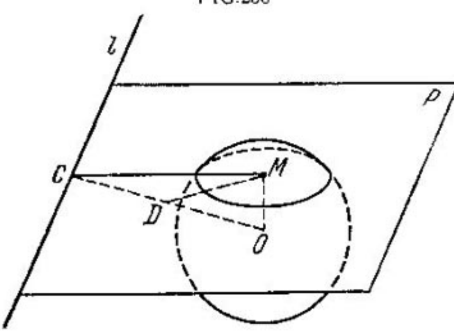

FIG. 239

se encuentran a una misma distancia $\frac{1}{2} AB$ del punto C y, por consiguiente, están dispuestos en una esfera de radio $\frac{1}{2} AB$ cuyo centro es el punto C. Es fácil ver, además, que cualquier punto de dicha esfera coincide con una de las proyecciones del punto B. Así pues, el lugar geométrico buscado es una esfera cuyo diámetro es AB.

525. Sea O el centro de la esfera dada. Tracemos por la recta dada l cierto plano P que corta a la esfera por una circunferencia con centro en el punto M (fig. 239). Como es sabido, $OM \perp P$. Tracemos, a continuación, por el punto O el plano P_1 perpendicular a la recta l. Designemos el punto de intersección del

plano P_1 con la recta l por C. Dado que los planos P_1 y P son perpendiculares, el segmento OM se encontrará en el plano P_1. Examinemos, ahora, el triángulo rectángulo OMC. El punto C no depende de la elección del plano secante P, y la hipotenusa OC del triángulo rectángulo OMC es una magnitud constante. Si D es el punto medio de OC, entonces $MD=\frac{OC}{2}$. Por consiguiente, si l no tiene puntos comunes con la esfera, el lugar geométrico buscado es una parte del arco de una circunferencia de radio $\frac{OC}{2}$, encerrada dentro de la esfera (el arco se encuentra en el plano P_1 y pasa por el centro de la esfera). Si l tiene contacto con la esfera, el lugar geométrico buscado será una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$, donde R es el radio de la esfera. Si, por fin, l cruza a la esfera, el lugar geométrico de los puntos M será una circunferencia de radio $\frac{OC}{2}$.

526. El lugar geométrico buscado es una superficie de revolución, obtenida como resultado de la rotación del arco de una circunferencia o de toda la circunferencia (véase la resolución del problema anterior) alrededor de su diámetro OC.

527. Demostremos que el lugar geométrico buscado es una esfera de radio $R\frac{\sqrt{6}}{2}$ y que el centro de esta esfera coincide con el centro de la esfera dada.

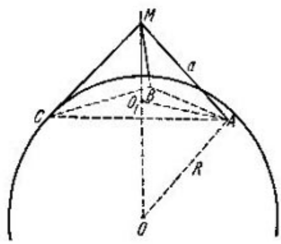

FIG. 240

Sea M un punto arbitrario del lugar geométrico buscado, los segmentos MA, MB y MC (fig. 240), por ser segmentos tangentes a la esfera, trazados desde un mismo punto, son iguales entre sí. Por eso, los triángulos rectángulos AMC, CMB y AMB son también iguales. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ es equilátero. Es evidente, que el segmento OM cortará a este triángulo en su centro de gravedad O_1. Sea $AM=a$, entonces

$$AC=a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad AO_1=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Colocando estos valores en la igualdad

$$OM\cdot AO_1=OA\cdot AM$$

(aquí nos valemos de que el $\triangle OAM$ es rectángulo y escribimos su área por dos métodos), obtendremos:

$$OM\cdot a\frac{\sqrt{6}}{3}=Ra.$$

De aquí,

$$OM=\frac{\sqrt{6}}{2}R.$$

Así pues, el punto M se encuentra en la esfera mencionada más arriba. Girando la esfera dada junto con las tangentes AM, CM y BM alrededor del centro O, nos convenceremos de que cualquier punto de la esfera pertenece al lugar geométrico examinado.

528. Designemos el punto dado del espacio por A, el punto de intersección de las rectas por B, y el pie de la perpendicular bajada desde A al plano por C. Tomemos, a continuación, cualquier recta que pase por el punto B y bajemos a esta recta la perpendicular AD (fig. 241). Entonces, por el teorema conocido, $CD \perp BD$.

Por consiguiente, el punto D se encuentra sobre una circunferencia cuyo diámetro es el segmento BC. Es fácil demostrar que también, al contrario, cualquier punto de la circunferencia indicada es el pie de la perpendicular bajada desde el punto A a cierta recta de la familia examinada. Por eso, el lugar geométrico buscado es una circunferencia de diámetro BC

529. Son posibles dos casos. 1) La recta AB no es paralela al plano examinado P. Designemos por D el respectivo punto de intersección de AB con P (fig. 242). Sea M el punto de tangencia del plano con una de las esferas del conjunto examinado. Tracemos un plano por las rectas AB y DM. Este plano cortará a la esfera por una circunferencia que hace con-

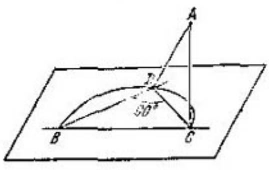

FIG. 241

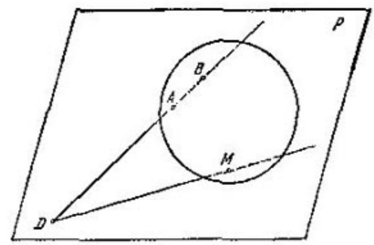

FIG. 242

tacto con la recta DM en el punto M. Por la conocida propiedad de la tangente y la secante trazadas desde un mismo punto a una circunferencia, tenemos:

$$DB \cdot DA = DM^2.$$

Por consiguiente, el segmento DM tiene una longitud constante igual a $\sqrt{BD \cdot DA}$, que no depende de la elección de la esfera y, por lo tanto, todos los puntos M se encuentran en una circunferencia de radio $r = \sqrt{DB \cdot DA}$ cuyo centro es el punto D. Designemos esta circunferencia por C. Supongamos, ahora, lo contrario, que M es cierto punto de la circunferencia C; demostremos que este punto pertenece al lugar geométrico examinado.

Tracemos por los puntos A, B y M una circunferencia auxiliar y designemos su centro por O_1 (fig. 243). Puesto que en las condiciones del problema $DB \cdot DA = DM^2$, entonces, la recta DM es tangente a esta circunferencia y, por consiguiente, $O_1M \perp DM$. Levantemos, ahora, en el punto M una perpendicular al plano P, y en el punto O_1, una perpendicular al plano de la circunferencia auxiliar. Estas dos perpendiculares se encuentran en un plano perpendicular a la recta DM en el punto M, y no son paralelas (en el caso contrario, el punto O_1, y junto con éste los puntos A y B, se encontrarían en el plano P). Por esta razón, estas perpendiculares se intersecan en cierto punto O. Es fácil ver, que $OA = OB = OM$, puesto que las proyecciones de estos segmentos O_1A, O_1B y O_1M son iguales entre sí como radios de una circunferencia. Por eso, si se construye una esfera de radio OM, cuyo centro sea el punto O, entonces, esta esfera hará contacto con el plano P y pasará por los puntos A y B. De este modo, al contrario, cualquier punto de la circunferencia C pertenece a nuestro lugar geométrico. Por consiguiente, el lugar geométrico buscado es la circunferencia C.

2) En el caso, cuando la recta AB es paralela al plano, el lugar geométrico buscado representa una recta que se encuentra en el plano P y que es perpendicular a la proyección del segmento AB sobre el plano P y la divide por la mitad.

530. Caso a). Sea D el punto medio del segmento AB (fig. 244), C el punto móvil, Q el centro de gravedad del $\triangle ABC$, y Q' el centro de gravedad del

$\triangle ASB$. Puesto que el punto Q divide al segmento DC en la relación de 1:2, el lugar geométrico de estos puntos es, evidentemente, un rayo paralelo a la arista SE, que pasa por el punto Q', o sea, por el centro de gravedad del $\triangle ASB$.

Caso b). Si, ahora, es el punto B el que se desplaza por e la arista SG, entonces, los centros de gravedad Q' de los triángulos ASB se encontrarán sobre un rayo paralelo a la arista SG, que pasa por el punto Q'' que divide al

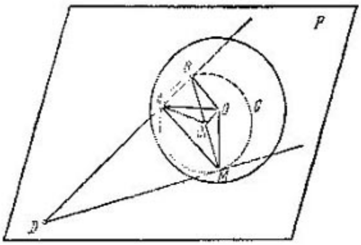

FIG. 243

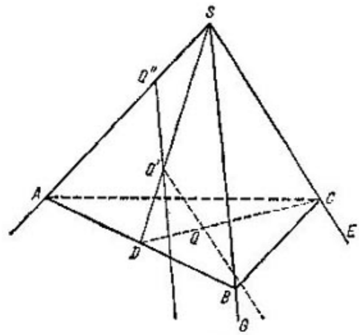

FIG. 244

segmento AS en la relación de 2:1, contando de A a S, y los rayos examinados en el caso a), correspondientes a cada posición fijada del punto B, llenarán la sección del ángulo triédrico con un plano que pasa por el punto Q'' paralelamente a las aristas SG y SE.

4. Valores máximos y mínimos

531. Sin derogar la comunidad, se puede considerar, que el plano secante se cruza con e la arista CE del cubo (fig. 245). Es fácil ver, que en la sección se obtiene siempre cierto paralelogramo $AMBN$. El área S del paralelogramo puede ser hallada por la fórmula

$$S = AB \cdot MK,$$

donde por MK se ha designado la perpendicular bajada desde el punto M de la arista CE a la diagonal AB. Así pues, el área S será mínima junto con la longitud del segmento MK. Pero, entre los segmentos que unen los puntos de las rectas que se cruzan CE y AB, la menor longitud la tiene la perpendicular común a estas rectas. No es difícil comprender, que la perpendicular común a dichas rectas es el segmento $M'O$ que une el punto medio de la arista CE y de la diagonal AB. En efecto, el $\triangle AM'B$ es isósceles y por eso $M'O \perp AB$. Puesto que también el $\triangle COE$ es isósceles, $M'O \perp CE$.

FIG. 245

Así pues, la sección de menor área es la sección que divide a la arista CE por la mitad; el área correspondiente S es

$$S = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Este mismo problema puede ser resuelto de otra manera, si se emplea el siguiente teorema: el cuadrado del área de un polígono plano es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de sus proyecciones sobre tres planos perpendiculares entre sí. Este teorema se demuestra sin dificultad a base de la fórmula, por la cual el área de la proyección de un polígono plano sobre un plano es igual al área del polígono multiplicada por el coseno del ángulo entre los planos (véase la fórmula (1) en la resolución del problema 456).

Considerando a este teorema demostrado, designemos por x la longitud del segmento CM (véase la fig. 245). Las proyecciones del paralelogramo que nos interesa sobre los planos ACD, $ECDB$ y BDN están representadas en el orden correspondiente en la fig. 246, *a*, *b* y *c*. Las áreas de las proyecciones son respectivamente iguales a a^2, ax y a^2-ax, así que, en virtud del teorema mencionado,

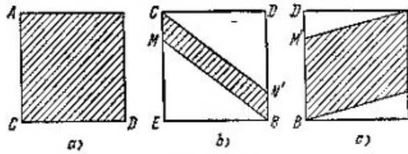

FIG. 246

$$S^2=(a^2)^2+(ax)^2+(a^2-ax)^2=2a^2(x^2-ax+a^2)$$

Representando al trinomio cuadrado x^2-ax+a^2 en la forma

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2,$$

hallamos (compárese con (1), pág. 47) que S^2 tendrá su valor mínimo cuando $x=\frac{a}{2}$, y el valor mínimo del área es

$$S_{\min}=\sqrt{2a^2\,\frac{3}{4}a^2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

532. El cuadrilátero $MNKL$ obtenido en la sección de la pirámide $ABCD$ (fig. 247) es un paralelogramo, puesto que $LK \parallel CD$ y $MN \parallel CD$; por consiguiente, $LK \parallel MN$ y, análogamente, $LM \parallel KN$, si $\angle LKN=\alpha$, entonces, el área del paralelogramo, por la fórmula conocida, es

$$S=KN\cdot KL \operatorname{sen} \alpha.$$

Puesto que $\angle LKN$ es igual al ángulo formado por las rectas que se cruzan AB y CD, el seno de este ángulo es una magnitud constante para todas las secciones paralelas examinadas. De este modo, el área de la sección depende solamente de la magnitud del producto $KN\cdot KL$. Designemos la longitud del segmento AK por x. Entonces, en virtud de la semejanza de los triángulos, tenemos:

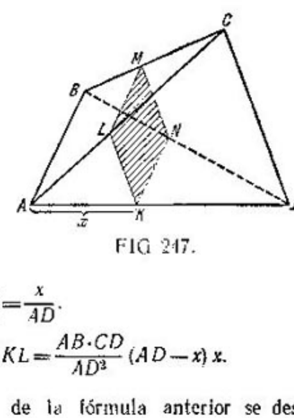

FIG. 247.

$$\frac{KN}{AB}=\frac{AD-x}{AD}; \quad \frac{KL}{CD}=\frac{x}{AD}.$$

Multipliquemos estas igualdades entre sí: $KN\cdot KL=\frac{AB\cdot CD}{AD^2}(AD-x)\,x.$

Dado que $\frac{AB\cdot CD}{AD^2}$ es una magnitud constante, de la fórmula anterior se desprende que el producto que nos interesa $KN\cdot KL$ adquiere su valor máximo junto con el producto $(AD-x)\,x$.

Examinando este producto como el trinomio cuadrado $-x^2+ADx$ y representándolo en la forma

$$-\left(x-\frac{AD}{2}\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2,$$

nos convencemos de que éste alcanza su valor máximo cuando $x=AD/2$ (compárese con (1), pág. 47).

TRIGONOMETRIA

1. Transformación de las expresiones que contienen funciones trigonométricas

533. Empleando la fórmula

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab],$$

obtenemos

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)[(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x]=$$
$$=1-3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x.$$

534. Designemos la parte izquierda de la identidad por S y sustituyemos el producto $2\cos\alpha\cos\beta$ de la fórmula (14) pág. 79 por la suma $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Entonces S se escribirá en la siguiente forma:

$$S=\cos^2\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Aplicando de nuevo la fórmula (14), hallamos:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta).$$

Si, ahora, sustituimos $\cos^2\alpha$ por $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, definitivamente obtendremos:

$$S=\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\operatorname{sen}^2\beta,$$

lo que era necesario demostrar.

535. De la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

se desprende que

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)[1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta],$$

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Suponiendo en la última igualdad $\alpha=x$, $\beta=2x$, obtenemos la fórmula requerida.

536. Tenemos:

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$$
$$=\operatorname{tg}x\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x(3-\operatorname{tg}^2 x)}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \qquad (1)$$

Por otra parte, empleando por segunda vez la fórmula para la tangente de la suma de dos ángulos, hallaremos fácilmente que

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x\,(3-\operatorname{tg}^2 x)}{1-3\operatorname{tg}^2 x}. \tag{2}$$

Comparando (1) y (2), obtenemos la solución del problema.

Observación: La fórmula (2) puede ser también deducida de las fórmulas (7) y (8) pág. 79.

537. Valiéndonos de las fórmulas para la suma y la diferencia de los senos, representamos la parte izquierda de la identidad en la forma siguiente:

$$2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].$$

De aquí, empleando la fórmula para la diferencia de los cosenos, obtenemos fácilmente que la parte izquierda de la identidad coincide con la derecha.

538. Utilizando la identidad del problema 537, obtendremos

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\alpha}{2}=4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

puesto que,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

539. Valiéndonos de la identidad indicada en el problema 537, obtendremos:

$$\operatorname{sen} 2n\alpha+\operatorname{sen} 2n\beta+\operatorname{sen} 2n\gamma=$$
$$=4\operatorname{sen} n(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen} n(\beta+\gamma)\cdot\operatorname{sen} n(\gamma+\alpha). \tag{1}$$

A continuación, tenemos que

$$\operatorname{sen} n(\alpha+\beta)=\operatorname{sen} n(\pi-\gamma)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen} n\gamma.$$

Transformando análogamente los otros dos factores en la parte derecha de (1), obtenemos la solución del problema.

540. Para la demostración multiplicamos ambos miembros de la igualdad $\cos(\alpha+\beta)=0$ por $2\operatorname{sen}\beta$ y empleamos la fórmula (15) pág. 79.

541. Los valores admisibles de los argumentos se determinan de la condición de que $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\neq 0$. Observemos que la igualdad

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

que se necesita demostrar, contiene los argumentos $\alpha+\beta$ y α. Por esta razón, es natural introducir estos mismos argumentos en la igualdad inicial. Tenemos:

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha,\qquad 2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha.$$

Colocando estas expresiones para β y $2\alpha+\beta$ en la igualdad inicial

$$3\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}(2\alpha+\beta) \tag{2}$$

y valiéndonos de las fórmulas para el senos de la suma y la diferencia de dos ángulos, transformemos la igualdad (2) a la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha. \tag{3}$$

Dividiendo ambos miembros de (3) por $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$, obtendremos (1).

542. Todos los valores de α y β son admisibles, excepto aquellos para los cuales $\cos(\alpha+\beta)=0$ y $\cos\beta=A$. Observando que $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\beta)$, escribamos la igualdad inicial en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta=A\operatorname{sen}(\alpha+\beta). \qquad (1)$$

Dividiendo ambos miembros de (1) por $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, obtendremos que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cos\beta-\operatorname{sen}\beta=A\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Expresando de aquí $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, hallaremos la igualdad requerida.

543. Es fácil comprobar que, en virtud de las condiciones del problema, $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, puesto que de lo contrario tendríamos que $|m|\leqslant|n|$. Por esta razón, la igualdad a demostrar tiene sentido. Representemos esta igualdad en la forma

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

de donde

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Sustituyamos en la relación (2) las tangentes de los ángulos α y $\alpha+\beta$ por los senos y cosenos, reduzcamos el quebrado a un denominador común y eliminemos el denominador común. Obtendremos:

$$m[\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta)]-$$
$$-n[\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]=0 \qquad (3)$$

o bien

$$m\operatorname{sen}\beta-n\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)=0. \qquad (4)$$

Así pues, la demostración se reduce a la demostración de la relación (4). Dado que la relación (4) se cumple por las condiciones del problema, entonces tiene lugar (3) y, por consiguiente, también (2).

Pero, de (2) se desprende (1), y de (1) se deriva la relación

$$\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n},$$

que era necesario demostrar.

544. Examinemos la identidad

$$\cos(x+y+z)=\cos(x+y)\cos z-\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}z=$$
$$=\cos x\cos y\cos z-\cos z\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y-\cos y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}z-\cos x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z.$$

Puesto que según la condición del problema $\cos x\cos y\cos z\neq 0$, de esta identidad se desprende que

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x).$$

545. Primera resolución. Según la condición del problema

$$0<\alpha<\pi,\quad 0<\beta<\pi,\quad 0<\gamma<\pi \quad \text{y} \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi. \qquad (1)$$

Por eso, de (1) se desprende que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Por otra parte, por la fórmula de la tangente de la suma, tendremos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Igualando los segundos miembros de las igualdades (2) y (3) y liberándonos de los denominadores, obtenemos la igualdad requerida.

Segunda resolución. De la fórmula

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

demostrada en el problema anterior, hallamos directamente que

$$1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0,$$

puesto que

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

546. Por el sentido de la expresión que se examina en el problema, $\cos x\cos y\cos z\neq 0$. Por esta razón, de la fórmula obtenida en el problema 544, hallamos:

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}=1-\frac{\cos\frac{\pi}{2}k}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Si k es impar, entonces, la expresión examinada es igual a 1 y no depende de x, y y z. Si k es par, entonces depende de x, y y z.

547. Primera resolución. Observemos, primeramente, que $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\neq 1$, puesto que, en el caso contrario, tendríamos que $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=0$, lo que es incompatible con la igualdad $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$. Por esta razón, de la condición del problema se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(-\beta-\gamma),$$

de donde hallamos que $\alpha=k\pi-\beta-\gamma$, es decir, que $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$.

Segunda resolución. En el problema 544 fue demostrada la fórmula para el coseno de la suma de tres ángulos. Análogamente se puede obtener la fórmula

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma),$$

suponiendo que $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$. Por esta fórmula hallamos que, según las condiciones de este problema,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=0,\ \text{es decir,}\ \alpha+\beta+\gamma=k\pi.$$

548. Designemos la suma dada por S. Transformemos los dos primeros sumandos de la forma siguiente:

$$\operatorname{cotg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x=\frac{\cos^2 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}-\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x}=$$
$$=\frac{\cos^4 2x-\operatorname{sen}^4 2x}{\operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x}=\frac{\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x}{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 4x}=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}(1-2\operatorname{sen}4x\cos 4x)=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}(1-\operatorname{sen}8x).$$

Puesto que $1-\operatorname{sen}8x=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$, entonces, obtendremos definitivamente:

$$S=\frac{8\cos 4x\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)}{\operatorname{sen}^2 4x}.$$

549. Designemos la expresión que se examina por S. Transformemos los dos primeros sumandos por la fórmula (16) pág. 79, y sustituyamos el producto $\cos\alpha\cos\beta$ por la suma de la fórmula (14) pág. 79, y por fin, sustituyamos $\operatorname{sen}^2\gamma$ por $1-\cos^2\gamma$. Entonces, obtendremos

$$S=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2\gamma+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma.$$

Transformando la suma $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$ en un producto y abriendo los corchetes, obtenemos:

$$S=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma.$$

Agrupando los sumandos en esta expresión, hallamos que

$$S=-[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma][\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma].$$

Por consiguiente,

$$S=4\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

550. La expresión que se examina se puede transformar de la manera siguiente (véase (13) pág. 79):

$$\frac{1-4\operatorname{sen}10^\circ\operatorname{sen}70^\circ}{2\operatorname{sen}10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\operatorname{sen}10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}.$$

Así pues,

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}10^\circ}-2\operatorname{sen}70^\circ=1.$$

551. En virtud de la fórmula (12), expuesta en la pág. 79, la parte izquierda de la identidad es igual a

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}. \qquad (1)$$

Multiplicando y dividiendo (1) por $2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$ y haciendo uso de la fórmula para $\operatorname{sen}2\alpha$, obtendremos:

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Pero,

$$\cos\frac{\pi}{10}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5},$$

y

$$\cos\frac{3\pi}{10}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.$$

Por consiguiente, la parte izquierda de la identidad es igual a $\frac{1}{2}$.

552. Multiplicando y dividiendo la parte izquierda de la identidad por $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ y valiéndonos de las fórmulas que expresan el producto de funciones trigonométricas por las sumas, hallaremos:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}+\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}.$$

De aquí se deduce que la suma examinada es igual a $-\frac{1}{2}$

553. Empleando para todos los sumandos de la suma S que se examina, al principio la fórmula (16), y a continuación la (17) pág. 79 hallaremos que

$$S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)$$

Las sumas entre paréntesis son iguales a cero, puesto que

$$\cos\frac{\pi}{8}=-\cos\frac{7\pi}{8},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=-\cos\frac{5\pi}{8},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=-\cos\frac{3\pi}{4},\quad \cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{7\pi}{4}.$$

Por consiguiente, $S=\frac{3}{2}$.

554. Si en la identidad

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha. \tag{1}$$

hacemos $\alpha=20^\circ$ (véase el problema 536), entonces, obtendremos directamente que

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}. \tag{2}$$

Expongamos otra resolución sin emplear la fórmula (1). Transformemos a parte el producto de los senos y los cosenos. Empleando las formulas (13) y (15) pag 79, obtendremos:

$$\operatorname{sen}20^\circ\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}80^\circ=\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos60^\circ)\operatorname{sen}80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}100^\circ+\operatorname{sen}60^\circ}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}80^\circ\right)$$

Observando que

$$\operatorname{sen} 100^\circ = \operatorname{sen} 80^\circ,$$

hallamos.

$$\operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \tag{3}$$

Luego,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{2 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ}{4 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{8 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{8 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Así pues,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}. \tag{4}$$

De (3) y (4) se desprende (2).

2. Ecuaciones trigonométricas y sistemas de ecuaciones

555. La ecuación puede escribirse así:

$$4 \operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 1$$

o bien

$$-2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = -\operatorname{sen} 4x = 1.$$

Respuesta:

$$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

556. La ecuación pierde el sentido cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, para los demás valores de x es equivalente a la siguiente:

$$\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

Después de simples simplificaciones, obtenemos:

$$\operatorname{sen} x (3 + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x) = 0.$$

La ecuación $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 3 = 0$, evidentemente, no tiene raíces, por eso, la ecuación inicial se reduce a la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$.

Respuesta: $x = k\pi$.

557. La ecuación se puede escribir en la forma siguiente:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x + \cos x) + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

o bien

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0.$$

Igualando cada uno de los paréntesis a cero, hallamos todas las raíces.

Respuesta. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

558. Escribamos la ecuación dada de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen} x + 1 - \cos 2x = \cos x - \cos 3x + \operatorname{sen} 2x.$$

Después de las simplificaciones comprensibles, obtenemos

$$\operatorname{sen} x+2 \operatorname{sen}^2 x=2 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} x\,(1+2 \operatorname{sen} x)\,(1-2 \cos x)=0.$$

Respuesta:

$$x_1=k\pi, \quad x_2=\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1}+k\pi, \quad x_3=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

559. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x\right)^2-\frac{1}{4} \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{4}=0$$

o bien

$$4 \cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-5=0. \qquad (1)$$

Resolviendo la ecuación cuadrada (1), hallamos:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1, \quad x=\frac{7\pi}{12}+k\pi.$$

La segunda raíz de la ecuación cuadrada (1), igual a $\frac{5}{4}$, no da solución, puesto que $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

560. Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2, la reduciremos a la forma

$$\operatorname{sen} 17x+\operatorname{sen}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

de donde

$$2 \operatorname{sen}\left(11x+\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Respuesta: $x_1=-\frac{\pi}{66}+\frac{k\pi}{11}$, $x_2=\frac{\pi}{36}+\frac{(2k+1)\pi}{12}$.

561. La ecuación dada pierde el sentido cuando $\cos x=0$; por eso, se puede considerar que $\cos x \neq 0$. Observando que el segundo miembro de la ecuación es igual a $3 \operatorname{sen} x \cos x+3 \cos^2 x$, y dividiendo ambos miembros por $\cos^2 x$, obtendremos:

$$\operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{tg} x+1)=3\,(\operatorname{tg} x+1),$$

o bien

$$(\operatorname{tg}^2 x-3)\,(\operatorname{tg} x+1)=0.$$

Respuesta: $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x_3=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.

562. Valiéndonos de la fórmula para la suma de los cubos de dos números transformemos el primer miembro de la ecuación de la siguiente manera:

$(\operatorname{sen} x+\cos x)\,(1-\operatorname{sen} x \cos x)=\left(1-\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)(\operatorname{sen} x+\cos x)$. Por consiguiente, la ecuación inicial toma la forma

$$\left(1-\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)(\operatorname{sen} x+\cos x-1)=0.$$

El primer paréntesis no se reduce a cero. Por eso, es suficiente examinar la ecuación $\operatorname{sen} x+\cos x-1=0$. Esta última ecuación se reduce a la forma

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Respuesta, $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

563. Empleando las fórmulas conocidas, escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x-\operatorname{cotg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-3. \qquad (1)$$

Puesto que

$$\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{cotg}^2 x \quad \text{y} \quad \sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x,$$

la ecuación (1) se reduce a la forma

$$\operatorname{tg}^2 x=1.$$

Respuesta $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

564. Utilizando la identidad

$$\operatorname{sen}^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{2}{3}x,$$

transformemos la ecuación a la forma

$$\operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}=\frac{3}{4}.$$

Respuesta $x=\frac{3n\pm 1}{2}\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

565. Utilizando la identidad, que figura en la resolución del problema anterior, obtendremos la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 2x+\operatorname{sen} 2x-1=0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Respuesta: $x=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{k\pi}{2}$.

566. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha)=\cos(x-\alpha)+k\cos 2x\cos(x-\alpha) \qquad (1)$$

Dado que

$$\cos x\cos(2x-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x-\alpha)],$$

$$\cos(x-\alpha)\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x+\alpha)]$$

la ecuación (1) toma la forma

$$k[\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)]=\cos(x-\alpha)-\cos(3x-\alpha)$$

o bien

$$k\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(2x-\alpha)\operatorname{sen} x. \qquad (2)$$

La ecuación (2) se descompone en dos:

a) sen $x=0$; entonces $x=l\pi$;
b) sen $(2x-\alpha)=k$ sen α;

entonces

$$x=\frac{\alpha}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(k\operatorname{sen}\alpha)+\frac{\pi}{2}n.$$

Para que la última expresión tenga sentido, k y α deberán estar enlazadas por la condición

$$|k\operatorname{sen}\alpha|\leqslant 1.$$

567. Dado que los números a, b, c y d son los términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces se puede hacer $b=a+r$, $c=a+2r$, $d=a+3r$ (r es la diferencia de la progresión). Empleando la fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

representemos la ecuación en la forma

$$\cos(2a+r)x-\cos(2a+5r)x=0$$

o bien

$$\operatorname{sen}(2a+3r)x\cdot\operatorname{sen}2rx=0,$$

de donde

$$x_1=\frac{k\pi}{2a+3r},\qquad x_2=\frac{k\pi}{2r}.$$

Las fórmulas escritas tienen sentido, puesto que

$$2a+3r=b+c>0\quad\text{y}\quad r\neq 0.$$

568. Escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-1\right)$$

o, después de simples transformaciones, en la forma

$$\left(\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(3\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

La ecuación

$$3\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

es equivalente a la siguiente:

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0$$

y no tiene soluciones reales.

Respuesta: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

569. **Primera resolución.** La ecuación pierde el sentido cuando $x=k\pi$, y para los demás valores de x es equivalente a la siguiente:

$$\cos x-\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}x. \qquad (1)$$

Sustituyendo el producto que figura en el segundo miembro de (1) por la suma, según la fórmula (13) pág. 79, obtenemos:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = \cos x - \cos 3x, \qquad \operatorname{sen} x = \cos 3x,$$

de donde

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

y, por consiguiente,

$$2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Respuesta

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi \qquad (2)$$

Segunda resolución. Empleando la fórmula (20), pág. 80, y suponiendo que sea $\operatorname{tg} x = t$, obtenemos la ecuación

$$t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0.$$

Descomponiendo el primer miembro en factores, obtenemos:

$$(t+1)(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2}) = 0,$$

de donde,

$$(\operatorname{tg} x)_1 = -1, \qquad (\operatorname{tg} x)_2 = \sqrt{2} - 1, \qquad (\operatorname{tg} x)_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Respuesta:

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi; \qquad x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + k\pi;$$

$$x_3 = -\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + k\pi.$$

Observación. Las dos últimas series de soluciones se pueden escribir mediante una sola fórmula (2).

570. Aplicando al primer miembro de la ecuación la fórmula (14), pág. 79, obtenemos:

$$\cos(2x - \beta) + \cos \beta = \cos \beta,$$

de donde

$$\cos(2x - \beta) = 0.$$

Por consiguiente,

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{\beta}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

571. La ecuación inicial se puede escribir en la forma

$$\operatorname{sen} \alpha + [\operatorname{sen}(2\varphi + \alpha) - \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha)] = \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) - \operatorname{sen}(\varphi - \alpha),$$

o, después de simples transformaciones, en la forma

$$\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \varphi.$$

Suponiendo que $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ (en el caso contrario $\cos \varphi$ es indeterminable), obtenemos:

$$1 + 2\cos 2\varphi - 2\cos\varphi = 0, \qquad 4\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1 = 0,$$

$$\cos\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Puesto que el ángulo φ se encuentra en el tercer cuadrante, entonces, $\cos\varphi < 0$. Por consiguiente,

$$\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

572. Empleando la fórmula $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$, escribamos la ecuación en la forma

$$\cos 2(\alpha+x) + \cos 2(\alpha-x) = 2a-2$$

o bien

$$\cos 2\alpha \cos 2x = a-1,$$

de donde

$$\cos 2x = \frac{a-1}{\cos 2\alpha}. \tag{1}$$

Puesto que, por otra parte,

$$\operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}},$$

entonces, de (1) hallamos que

$$\operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{\frac{a-1+\cos 2\alpha}{1-a+\cos 2\alpha}}$$

De la fórmula (1) se desprende que el problema tiene sentido cuando $\cos 2\alpha \neq 0$ y $|\cos 2\alpha| \geqslant |a-1|$.

573. Utilizando las fórmulas (18) y (19), pág. 80, reducimos la relación dada $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ a la forma

$$(2+\sqrt{7})\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - (2-\sqrt{7}) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación respecto a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, obtendremos.

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1 = \frac{3}{2+\sqrt{7}} = \sqrt{7}-2$$

y

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Comprobemos si satisfacen los valores hallados de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ las condiciones del problema

Puesto que $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{8}$, entonces,

$$0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

El valor

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

satisface la condición del problema, ya que $\frac{\sqrt{7}-2}{3} < \sqrt{2}-1$. La raíz $\sqrt{7}-2$

debe suprimirse, puesto que

$$\sqrt{7}-2 > \sqrt{2}-1.$$

574. Haciendo $\operatorname{sen} x-\cos x=t$ y valiéndonos de la identidad $(\operatorname{sen} x-\cos x)^2 = 1-2\operatorname{sen} x\cos x$, escribamos la ecuación inicial en la forma

$$t^2+12t-13=0.$$

Esta ecuación tiene las raíces $t_1=-13$ y $t_2=1$. Pero, $t=\operatorname{sen} x-\cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, de donde $|t|\leqslant\sqrt{2}$, por consiguiente, la raíz $t_1=-13$ puede no examinarse. Por esta razón, la ecuación inicial se reduce a la siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Respuesta: $x_1=\pi+2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

575 Transformemos la ecuación dada a la forma

$$2\cos^2\frac{x}{2}(2+\operatorname{sen} x)+\operatorname{sen} x=0.$$

Utilizando la fórmula $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$ y abriendo los paréntesis, obtenemos:

$$2+2(\operatorname{sen} x+\cos x)+\operatorname{sen} x\cdot\cos x=0. \qquad (1)$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la del problema 574. Sustituyendo $\operatorname{sen} x+\cos x=t$, la ecuación (1) se lleva a la ecuación cuadrada $t^2+4t+3=0$, cuyas raíces son $t_1=-1$ y $t_2=-3$. Puesto que $|\operatorname{sen} x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$, a la ecuación inicial la pueden satisfacer solamente las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sen} x+\cos x=-1. \qquad (2)$$

Resolviendo la ecuación (2), obtenemos:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$x_2=(2k+1)\pi.$$

La segunda serie de raíces se debe despreciar, puesto que $\operatorname{sen} x_2=0$ y la ecuación inicial pierde el sentido.

Respuesta $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

576. La ecuación dada pierde el sentido cuando $x=k\pi$, y cuando $x\neq k\pi$ puede ser escrita en la forma

$$\cos^3 x+\cos^2 x=\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^2 x.$$

Pasando todos los términos de la ecuación a la parte izquierda y descomponiéndolos en factores, obtenemos:

$$(\cos x-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x+\cos x)=0.$$

De aquí se desprenden dos posibilidades:

a) $\operatorname{sen} x-\cos x=0$, entonces,

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi; \qquad (1)$$

b) $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x+\cos x=0. \qquad (2)$

La ecuación (2) es análoga a la examinada en el problema 574 y tiene las soluciones

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{3}$$

y

$$x_3 = (2k+1)\pi \tag{4}$$

Pero, los valores de x que figuran en la fórmula (4), no son raíces de la ecuación inicial, puesto que, siendo $x = n\pi$ la ecuación inicial pierde el sentido. Por consiguiente, la ecuación tiene las raíces determinadas por las fórmulas (1) y (3).

577. Escribamos la ecuación de la manera siguiente.

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} + 1\right).$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador y liberándonos de este último, obtendremos la ecuación

$$2(\operatorname{sen} 3x \cos 2x - \cos 3x \operatorname{sen} 2x)\cos 2x = \operatorname{sen} 2x(\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \cos 2x \cos 3x).$$

Pero, la expresión que figura entre paréntesis en el primer miembro es igual a $\operatorname{sen} x$, y la que figura entre paréntesis en el segundo miembro es igual a $\cos x$. Por esta razón, llegamos a la ecuación

$$2 \operatorname{sen} x(\cos 2x - \cos^2 x) = -2 \operatorname{sen}^3 x = 0,$$

de donde $x = k\pi$.

578. La ecuación dada se puede escribir en la forma

$$3\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

o bien

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}.$$

Observemos que esta ecuación tiene sentido si

$$\operatorname{sen} 2x \neq 0, \quad \operatorname{sen} 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0$$

Para los valores de x, para los cuales la ecuación (1) tiene sentido,

$$3 \operatorname{sen} x \cos 2x = \operatorname{sen} 3x,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x(3 - 4 \operatorname{sen}^2 x - 3\cos 2x) = 0,$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^3 x = 0.$$

Puesto que la última ecuación es equivalente a la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$, entonces, en virtud de la observación hecha más arriba, la ecuación inicial no tiene raíces.

579. Escribimos la ecuación en la forma

$$6(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 3x,$$

después de lo cual la transformamos de la siguiente manera:

$$6\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

o bien

$$\frac{6\cos 2x}{\cos x\,\text{sen}\,3x}=\frac{\cos x}{\cos 2x\,\text{sen}\,3x};$$
$$6\cos^2 2x=\cos^2 x;$$
$$12\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

Resolviendo la última ecuación, hallamos

$$\cos 2x=\frac{1\pm 7}{24},$$

de donde

$$1)\ \cos 2x=\frac{1}{3},\qquad x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi;$$
$$2)\ \cos 2x=-\frac{1}{4},\qquad x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi.$$

Durante la resolución se realizó la multiplicación de ambos miembros de la ecuación por $\cos x\cos 2x\,\text{sen}\,3x$. Pero, es fácil ver, que para ninguno de los valores hallados de x este producto se reduce a cero. Por consiguiente, todos los valores hallados de x son raíces de la ecuación inicial.

580. Reduciendo los quebrados que figuran en el segundo miembro de la ecuación a un común denominador y empleando la fórmula

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

obtenemos:

$$\text{sen}\,x\cos x\,(\text{sen}\,x-\cos x)(\text{sen}^4 x+\text{sen}^3 x\cos x+\text{sen}^2 x\cos^2 x+$$
$$+\text{sen}\,x\cos^3 x+\cos^4 x)=\text{sen}\,x-\cos x.$$

De aquí se desprende, que o bien

$$\text{sen}\,x-\cos x=0, \tag{1}$$

o bien

$$\text{sen}\,x\cos x\,(\text{sen}^4 x+\text{sen}^3 x\cos x+\text{sen}\,x\cos^3 x+\cos^4 x+\text{sen}^2 x\cos^2 x)-1=0, \tag{2}$$

Transformemos, ahora, la ecuación (2), aprovechando que

$$\text{sen}^4 x+\cos^4 x=(\text{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x,$$

y que

$$\text{sen}^3 x\cos x+\cos^3 x\,\text{sen}\,x=\text{sen}\,x\cos x.$$

Haciendo, además, en la ecuación (2) $\text{sen}\,x\cos x=y$, escribamos la ecuación (2) en la forma

$$y^3-y^2-y+1=0 \tag{3}$$

o (después de descomponer el primer miembro en factores) en la forma

$$(y-1)^2(y+1)=0.$$

Si $y=1$, es decir, si $\text{sen}\,x\cos x=1$, entonces, $\text{sen}\,2x=2$, lo que es imposible. Si $y=-1$, entonces, $\text{sen}\,2x=-2$, lo que es también imposible.

Así pues, la ecuación (2) no tiene raíces. Por consiguiente, las raíces de la ecuación inicial son las raíces de la ecuación (1), es decir, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

581. El primer miembro de la ecuación pierde el sentido cuando $x=k\pi$ y cuando $x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, puesto que siendo $x=2l\pi$ la función $\text{cotg}\,\frac{x}{2}$ es indeterminada, siendo $x=(2l+1)\pi$ es indeterminada la función $\text{tg}\,\frac{x}{2}$, y siendo

$x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, el denominador del segundo miembro se hace igual a cero. Si $x\neq k\pi$ tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Por consiguiente, si $x\neq k\pi$ y $x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ (k y m son números enteros arbitrarios), el segundo miembro de la ecuación es igual a $-2\operatorname{sen}x\cos x$.

El primer miembro de la ecuación no tiene sentido cuando $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\frac{\pi}{2}$ ($l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$), y para los demás valores de x, es igual a $-\operatorname{tg}x$, puesto que

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Así pues, si $x\neq k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ y $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$, entonces la ecuación inicial tiene la forma

$$\operatorname{tg}x=2\operatorname{sen}x\cos x.$$

Esta ecuación tiene las raíces

$$x=k\pi \quad \text{y} \quad x=\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2}.$$

De aquí se desprende que la ecuación inicial no tiene raíces.

582. Multiplicando el segundo miembro de la ecuación por $\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$, la llevamos a la forma

$$(1-a)\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x\cos x-(a+2)\cos^2x=0. \qquad (1)$$

Supongamos, al principio, que $a\neq1$. Entonces, de (1) se desprende que $\cos x\neq0$, puesto que, en el caso contrario, tendríamos que $\operatorname{sen}x=\cos x=0$, lo cual es imposible. Dividiendo ambos miembros de (1) por $\cos^2x$ y haciendo $\operatorname{tg}x=t$, obtendremos la ecuación

$$(1-a)t^2-t-(a+2)=0. \qquad (2)$$

La ecuación (1) tiene solución cuando, y sólo cuando, las raíces de la ecuación (2) son reales, es decir, cuando su discriminante es

$$D=-4a^2-4a+9\geqslant0. \qquad (3)$$

Resolviendo la desigualdad (3), hallamos:

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}-1}{2}. \qquad (4)$$

Sean t_1 y t_2 las raíces de la ecuación (2). Entonces, las correspondientes soluciones de la ecuación (1) tienen la forma

$$x_1=\operatorname{arctg}t_1+k\pi, \quad x_2=\operatorname{arctg}t_2+k\pi.$$

Examinemos ahora el caso en que $a=1$.

En este caso, la ecuación (1) se escribe en la forma

$$\cos x\,(\operatorname{sen} x+3\cos x)=0$$

y tiene las soluciones siguientes:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\qquad x_2=-\operatorname{arctg} 3+k\pi.$$

583 Empleando las fórmulas

$$\operatorname{sen}^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2,\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

y haciendo $\cos 2x=t$, escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$t^2-6t+4a^2-3=0. \tag{1}$$

La ecuación inicial tendrá solución solamente para tales valores de a, para los cuales las raíces t_1 y t_2 de la ecuación (1) sean reales y, por lo menos, una de estas raíces, por su valor absoluto, no sea mayor que la unidad.

Resolviendo la ecuación (1), hallamos:

$$t_1=3-2\sqrt{3-a^2},\quad t_2=3+2\sqrt{3-a^2}.$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación (1) son reales si

$$|a|\leqslant\sqrt{3}. \tag{2}$$

Si se cumple la condición (2), entonces $t_2>1$, y por esta razón, esta raíz puede ser despreciada. De este modo, el problema se reduce a la determinación de aquellos valores de a que satisfacen la condición (2), para los cuales $|t_1|\leqslant 1$, es decir, para los cuales

$$-1\leqslant 3-2\sqrt{3-a^2}\leqslant 1. \tag{3}$$

De (3) hallamos que

$$-4\leqslant -2\sqrt{3-a^2}\leqslant -2,$$

de donde

$$2\geqslant\sqrt{3-a^2}\geqslant 1. \tag{4}$$

Puesto que la desigualdad $2\geqslant\sqrt{3-a^2}$ se cumple siendo $|a|\leqslant\sqrt{3}$, entonces, el sistema de desigualdades (4) se reduce a la desigualdad

$$\sqrt{3-a^2}\geqslant 1,$$

de donde hallamos que $|a|\leqslant\sqrt{2}$.

Así pues, la ecuación inicial es soluble si $|a|\leqslant\sqrt{2}$, y tiene la solución

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-2\sqrt{3-a^2}\right)+k\pi.$$

584. Transformemos la ecuación dada, multiplicando ambos miembros por $32\operatorname{sen}\frac{\pi x}{31}$. Empleando unas cuantas veces la fórmula $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{32}{31}\pi x=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{31}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\cos\frac{33}{62}\pi x=0. \tag{1}$$

De aquí hallamos dos series de raíces:

$$x_1=2n,\quad x_2=\frac{31}{33}(2n+1)\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Puesto que durante la resolución se realizó la multiplicación de ambos miembros de la ecuación dada por el factor $32\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{31}$, que puede reducirse a cero, la ecuación (1) puede tener raíces ajenas para la ecuación inicial. Serán raíces ajenas únicamente las raíces de la ecuación

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{31}=0, \tag{2}$$

que no satisfagan a la ecuación inicial.

Las raíces de la ecuación (2) se dan por la fórmula

$$x=31k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \tag{3}$$

y, como es fácil ver, no satisfacen a la ecuación inicial. Por esta razón, de la serie hallada de raíces de la ecuación (1), deben ser excluidas todas aquellas que tienen la forma (3). Para las raíces de la primera serie esto conduce a la ecuación $2n=31k$, que es posible solamente para los valores pares de k, es decir, para $k=2l$ y $n=31l$ $(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Para las raíces de la segunda serie análogamente obtenemos la igualdad $\frac{31}{33}(2n+1)=31k$ o bien $2n+1=33k$, que es posible únicamente cuando k es impar, o sea, cuando $k=2l+1$ y $n=33l+16$ $(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

Así pues, las raíces de la ecuación inicial son:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=2n,\ \text{donde } n\neq 31l,\\ &x_2=\frac{31}{33}(2n+1),\ \text{donde } n\neq 33l+16. \end{aligned}\right\}\quad l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

585. Escribamos la ecuación de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}\,7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,5x,$$

o bien

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\cos 7x+\cos\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,7x=\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\,5x,$$

es decir,

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+5x\right).$$

Pero, $\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{sen}\,\beta$ cuando, y sólo cuando, o bien $\alpha-\beta=2k\pi$, o bien $\alpha+\beta=(2m+1)\pi$ $(k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Por consiguiente,

$$\frac{\pi}{6}+7x-\frac{\pi}{3}-5x=2k\pi$$

o bien

$$\frac{\pi}{6}+7x+\frac{\pi}{3}+5x=(2m+1)\pi.$$

Así pues, las raíces de la ecuación serán:

$$\left.\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{12}(12k+1),\\ &x=\frac{\pi}{24}(4m+1) \end{aligned}\right\}\quad (k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

586. Puesto que el primer miembro de la ecuación es igual a $2-(7+\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x)=$

$$=2-(7+\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=2-(7+\operatorname{sen} 2x)\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x,$$

haciendo $t=\operatorname{sen} 2x$, escribamos la ecuación en la forma

$$t^3+7t^2-8=0. \tag{1}$$

La ecuación (1) tiene la raíz evidente $t_1=1$. Sus otras dos raíces se hallan de la ecuación

$$t^2+8t+8=0. \tag{2}$$

Estas raíces son iguales a

$$-4+2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad -4-2\sqrt{2}.$$

Ambos estos valores se pueden despreciar, puesto que en valor absoluto son mayores que la unidad. Por consiguiente, las raíces de la ecuación inicial son las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} 2x=1$.

Respuesta. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

587. Se puede considerar que $a^2+b^2\neq 0$, puesto que, en el caso contrario la ecuación toma la forma $c=0$ y no permite hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Es conocido, que si $a^2+b^2\neq 0$, entonces, siempre existe un ángulo φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, tal, que

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1}$$

Dividiendo esta ecuación miembro a miembro por $\sqrt{a^2+b^2}$ y utilizando (1), obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{2}$$

Puesto que siempre $|\operatorname{sen}(x+\varphi)|\leqslant 1$, esta ecuación tiene solución si, y sólo si, $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ o si $c^2\leqslant a^2+b^2$. Esta es precisamente la condición de resolubilidad del problema. A continuación, hallamos:

$$\cos(x+\varphi)=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x+\varphi)}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Observando que

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(x+\varphi-\varphi)=\operatorname{sen}(x+\varphi)\cos\varphi-\cos(x+\varphi)\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\cos x=\cos(x+\varphi-\varphi)=\cos(x+\varphi)\cos\varphi+\operatorname{sen}(x+\varphi)\operatorname{sen}\varphi,$$

y colocando (2) y (3) en la parte derecha de la expresión (1), definitivamente obtendremos dos soluciones:

$$\text{a)}\ \operatorname{sen} x=\frac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x=\frac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};$$

$$\text{b)}\ \operatorname{sen} x=\frac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x=\frac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

588. Observando que $(b \cos x + a)(b \operatorname{sen} x + a) \neq 0$ (en el caso contrario, la ecuación pierde el sentido), nos liberamos de los denominadores. Como resultado obtenemos:

$$ab \operatorname{sen}^2 x + (a^2 + b^2) \operatorname{sen} x + ab = ab \cos^2 x + (a^2 + b^2) \cos x + ab,$$

de donde

$$(a^2 + b^2)(\operatorname{sen} x - \cos x) - ab(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0,$$

y la ecuación se descompone en dos

$$1^{\text{a}}.\ \operatorname{sen} x = \cos x, \quad \text{de donde } x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

y

$$2^{\text{a}}.\ \operatorname{sen} x + \cos x = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Pero la última ecuación no tiene soluciones, puesto que $\frac{a^2+b^2}{|ab|} \geqslant 2$, mientras que

$$|\operatorname{sen} x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}\left|\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

Respuesta: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

589. Valiéndonos de la identidad

$$\cos^6 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)$$

y de la fórmula

$$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x \quad \text{(véase (8), pág. 79)},$$

llevamos la ecuación a la forma

$$4\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0. \tag{1}$$

De (1) hallamos que

$$(\cos 2x)_1 = -1, \quad (\cos 2x)_2 = -\frac{1}{4}.$$

Respuesta:

$$x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi;$$

$$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi.$$

590. Empleando las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \ \text{ y } \ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1,$$

representemos la ecuación en la forma

$$(1 - \cos 2x)^3 + 3\cos 2x + 2(2\cos^2 2x - 1) + 1 = 0,$$

o bien

$$7\cos^2 2x - \cos^3 2x = 0,$$

de donde

$$\cos 2x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

591. De las fórmulas para $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$, hallaremos:

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \qquad \operatorname{sen}^3 x = \frac{3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}.$$

Por consiguiente, la ecuación se puede presentar en la forma

$$\cos 3x\,(\cos 3x + 3\cos x) + \operatorname{sen} 3x\,(3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x) = 0,$$

o bien

$$3\,(\cos 3x \cos x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) + \cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = 0,$$

o bien

$$3\cos 2x + \cos 6x = 0. \tag{1}$$

Pero, puesto que

$$\cos^3 2x = \frac{\cos 6x + 3\cos 2x}{4},$$

la ecuación (1) toma la forma

$$4\cos^3 2x = 0,$$

de donde

$$\cos 2x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n.$$

592. Utilizando la identidad $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, obtendremos:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 2x,$$

de donde

$$\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x = \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \operatorname{sen}^4 2x = \frac{17}{32},$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^4 2x = \frac{17}{32}, \quad \operatorname{sen}^4 2x - 8 \operatorname{sen}^2 2x + \frac{15}{4} = 0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada obtenida, hallaremos:

$$\operatorname{sen}^2 2x = 4 \pm \frac{7}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}, \qquad 2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

de donde

$$x = \frac{2k+1}{8}\pi.$$

593. Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ por $\frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\frac{1+\cos 2x}{2}$ respectivamente, escribamos la ecuación en la forma siguiente:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^6 = \frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

o bien

$$(1-\cos 2x)^6 + (1+\cos 2x)^6 = 58\cos^4 2x.$$

Haciendo $\cos 2x = y$, después de simples transformaciones, obtenemos la siguiente ecuación bicuadrada respecto a y:

$$24y^4 - 10y^2 - 1 = 0.$$

Esta ecuación tiene solamente dos raíces reales: $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por consiguiente, $\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, de donde $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

594. Valiéndonos de la identidad obtenida en el problema 261, escribamos la ecuación inicial en la forma

$$(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x)(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x)=0,$$

o, después de descomponer las sumas de los senos en factores, en la forma

$$\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos x\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Igualando cada uno de los factores a cero, obtendremos cinco series de soluciones

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n_2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi;$$

$$4)\ x=\frac{2n_4+1}{2}\pi;\quad 5)\ x=(2n_5+1)\pi,$$

donde n_1, n_2, n_3, n_4 y n_5 son números enteros arbitrarios.

Observando, que las soluciones de las series 4) y 5) se contienen en la serie 2), definitivamente obtendremos las siguientes tres series de soluciones

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n_2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi,$$

donde n_1, n_2 y n_3 son números enteros cualesquiera.

595. **Primera resolución.** Cuando $n=1$ la ecuación se transforma en una identidad. Si $n>1$, entonces, de la identidad

$$1=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^n=\operatorname{sen}^{2n} x+\binom{n}{1}\operatorname{sen}^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n-1}\operatorname{sen}^2 x\cos^{2(n-1)}x+\cos^{2n} x,$$

en virtud de la ecuación dada, obtenemos:

$$\binom{n}{1}\operatorname{sen}^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots+\binom{n}{n-1}\operatorname{sen}^2 x\cos^{2(n-1)} x=0.$$

Dado que ninguno de los sumandos es negativo, entonces, o bien $\operatorname{sen}^2 x=0$, o bien $\cos^2 x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}k$.

Segunda resolución. Es evidente, que la ecuación se satisface si x toma valores múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, es decir, si $x=\frac{\pi}{2}k$ (k es un número entero). Demostremos que la ecuación

$$\operatorname{sen}^{2n} x+\cos^{2n} x=1$$

no tiene otras raíces. Sea $x_0\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$; entonces $\operatorname{sen}^2 x_0<1$ y $\cos^2 x_0<1$, de donde se desprende que para $n>1$ tendremos que $\operatorname{sen}^{2n} x_0<\operatorname{sen}^2 x_0$ y $\cos^{2n}x_0<\cos^2 x_0$ y, por lo tanto,
$\operatorname{sen}^{2n} x_0+\cos^{2n} x_0<\operatorname{sen}^2 x_0+\cos^2 x_0=1$. Con esto el problema queda demostrado.

596. Hagamos $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=y$, entonces, $\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-3\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\pi-3y$ la ecuación toma la forma

$$\operatorname{sen} 3y=2\operatorname{sen} y.$$

Con ayuda de la fórmula (7), pág. 79, la última ecuación se puede escribir así:

$$\operatorname{sen} y\,(4\operatorname{sen}^2 y-1)=0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) tiene las siguientes soluciones:

$$y_1=k\pi,\qquad y_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\qquad y_3=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

Volviendo al argumento x, por la fórmula $x=\frac{3\pi}{5}-2y$, definitivamente obtendremos tres series de soluciones de la ecuación inicial

$$x_1=\frac{3\pi}{5}-2k\pi,\qquad x_2=\frac{3\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-\pi k,$$

$$x_3=\frac{3\pi}{5}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}-\pi k.$$

597. Puesto que $|\cos\alpha|\leqslant 1$ y $\operatorname{sen}\alpha\geqslant -1$, entonces,

$$|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant 2,\quad \operatorname{sen} 3x+5\geqslant 4.$$

Así pues, el primer miembro de la ecuación no sobrepasa de 4, el segundo miembro no es menor de 4. Por consiguiente, $|\cos 4x-\cos 2x|=+2$ (y, entonces, o bien $\cos 4x=-1$ y $\cos 2x=1$, o bien $\cos 4x=1$ y $\cos 2x=-1$) y $\operatorname{sen} 3x=-1$. Examinemos los casos posibles.

a) $\cos 4x=-1,\qquad x=\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi;$

$\cos 2x=1,\qquad x=\pi k;$

$\operatorname{sen} 3x=-1,\qquad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}l.$

No hay raíces comunes.

b) $\cos 4x=1,\qquad x=\frac{\pi n}{2};$

$\cos 2x=-1,\qquad x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;$

$\operatorname{sen} 3x=-1,\qquad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l=\frac{4l-1}{6}\pi.$

Las raíces comunes son:

$$x=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

598. Transformemos la ecuación a la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2\operatorname{sen} x\cos x},$$

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} 2x=1. \qquad (1)$$

Puesto que $|\operatorname{sen}\alpha|\leqslant 1$, entonces, (1) tiene lugar, si, o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\quad y\quad \operatorname{sen} 2x=-1,$$

o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2x=1.$$

Pero, las dos primeras ecuaciones no tienen raíces comunes, y las dos segundas ecuaciones tienen las raíces comunes $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene las raíces:

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

599. Dividiendo la ecuación dada miembro a miembro por 2 y observando que

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3},$$

obtendremos la ecuación equivalente

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen} 4x=1.$$

La última igualdad es posible solamente en el caso cuando

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 4x=\pm 1,$$

de donde

$$x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \text{y} \quad x=\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2m\pi\right),$$

donde n y m son números enteros. Igualando ambos valores entre sí, después de simplificar por π, obtenemos la ecuación

$$-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}+2n=\pm\frac{1}{8}+\frac{m}{2},$$

o después de la multiplicación por 24

$$12m-48n=-8\pm 9.$$

Para cualesquiera valores enteros de m y n, la parte izquierda es un número entero par, y la parte derecha, un número impar (1 ó -17). La última igualdad, para valores enteros de m y n, es imposible, lo que había que demostrar.

600. **Primera resolución.** El problema es equivalente al siguiente: ¿qué valores puede tomar la función $\lambda=\sec x+\operatorname{cosec} x$, si el argumento x varía en los límites de $0<x<\frac{\pi}{2}$?

Examinemos la función

$$\lambda^2=(\sec x+\operatorname{cosec} x)^2=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}+\frac{4}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Cada uno de los sumandos que figuran en la parte derecha, al aumentar x desde cero hasta $\frac{\pi}{2}$ se porta de la siguiente manera: al principio disminuye desde $+\infty$ hasta 4 $\left(\text{cuando } 0<x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$, y luego aumenta desde 4 hasta $+\infty$

$\left(\text{cuando } \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$; para $x=\frac{\pi}{4}$, ambos sumandos adquieren simultáneamente sus valores mínimos, por consiguiente, también la suma tendrá sus valores mínimos cuando $x=\frac{\pi}{4}$. Al mismo tiempo, $\lambda^2=8$. Por esta razón, si $0<x<\frac{\pi}{2}$, entonces, $\lambda^2 \geqslant 8$, y puesto que $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ en el primer cuadrante son positivos, entonces, $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$. La gráfica de la función $\lambda(x)$ se muestra en la fig. 248.

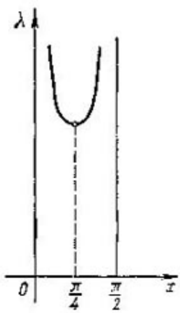

FIG. 248

Segunda resolución. Observemos en seguida que debemos limitarnos a examinar solamente los valores positivos de λ, puesto que siendo $0<x<\frac{\pi}{2}$, las funciones $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ son positivas. Transformando la ecuación a la forma

$$\operatorname{sen} x+\cos x=\lambda \operatorname{sen} x \cos x,$$

elevemos ambos miembros de esta ecuación al cuadrado, como resultado obtendremos:

$$1+\operatorname{sen} x \cos x=\lambda^2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$$

Haciendo, ahora, $\operatorname{sen} 2x=z$, tendremos:

$$\lambda^2 z^2-4z-4=0,$$

de donde

$$z_{1,2}=\frac{2 \pm \sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}. \qquad (1)$$

Puesto que por la condición del problema $0<x<\frac{\pi}{2}$, entonces $z=\operatorname{sen} 2x>0$, y debemos tomar en la igualdad (1) el signo más, es decir,

$$z=\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}.$$

Si ahora conseguimos satisfacer la desigualdad

$$\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2} \leqslant 1, \qquad (2)$$

entonces, la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$$

tendrá una solución x tal, que $0<x<\frac{\pi}{2}$. Esto último satisfará también a la ecuación inicial, de lo cual es fácil convencerse. Si no se satisface la desigualdad (2), no existe la solución necesaria. Así pues, el problema se ha reducido a la resolución de la desigualdad (2). Liberando esta desigualdad del denominador, obtenemos fácilmente que $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$.

601. Del sistema dado obtenemos directamente que

$$x+y=k\pi, \qquad x-y=l\pi.$$

De aquí

$$x=\frac{k+l}{2}\pi, \qquad y=\frac{k-l}{2}\pi.$$

Según la condición del problema $0 \leqslant k+l \leqslant 2$, $0 \leqslant k-l \leqslant 2$.

A estas desigualdades las satisfacen los siguientes 5 pares de valores de k y l

1) $k=0$, $l=0$; 2) $k=1$, $l=0$;
3) $k=1$, $l=-1$; 4) $k=1$, $l=1$;
5) $k=2$, $l=0$.

Respuesta: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=\frac{\pi}{2}$, $y_2=\frac{\pi}{2}$;

$$x_3=0, \quad y_3=\pi; \qquad x_4=\pi, \quad y_4=0; \qquad x_5=\pi, \quad y_5=\pi.$$

602. Transformemos el sistema a la forma

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= 1+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ \cos^2 x &= 1+\cos x \cos y. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sumando y sustrayendo las ecuaciones del sistema (1), obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x-\cos(x+y)&=0, \\ 1+\cos(x-y)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La primera ecuación del sistema (2) se puede escribir así:

$$\cos 2x-\cos(x+y)=2 \operatorname{sen}\left(\frac{3x+y}{2}\right) \operatorname{sen}(y-x)=0$$

Si $\operatorname{sen}(x-y)=0$, entonces, $x-y=k\pi$. Pero, de la segunda ecuación del sistema (2) hallamos:

$$\cos(x-y)=-1, \qquad x-y=(2n+1)\pi$$

Por consiguiente, en este caso, tenemos una cantidad innumerable de soluciones: $x-y=(2n+1)\pi$.

Si $\operatorname{sen}\left(\frac{3x+y}{2}\right)=0$, entonces, $3x+y=2k\pi$. Pero $x-y=(2n+1)\pi$. Por consiguiente,

$$x=\frac{2k+2n+1}{4}\pi, \qquad y=\frac{2k-6n-3}{4}\pi.$$

603. Elevemos ambas ecuaciones al cuadrado, sumémoslas miembro a miembro y hagamos uso de la identidad

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

(véase el problema 533). Obtendremos: $\operatorname{sen}^2 2x=1$. Si $\operatorname{sen} 2x=1$, entonces, o bien $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, o bien $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$. En el primer caso, del sistema inicial hallaremos que $\operatorname{sen} y=\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y en el segundo caso, $\operatorname{sen} y=\cos y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Análogamente se examina el caso cuando $\operatorname{sen} 2x=-1$.

Respuesta:

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{\pi}{4}+2k\pi, & y_1&=\frac{\pi}{4}+2l\pi; \\ x_2&=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi, & y_2&=\frac{\pi}{4}+(2l+1)\pi; \\ x_3&=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, & y_3&=\frac{3\pi}{4}+2l\pi; \\ x_4&=\frac{3}{4}\pi+(2k+1)\pi, & y_4&=\frac{3}{4}\pi+(2l+1)\pi. \end{aligned}$$

604. La primera ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}=1,$$

de donde, en virtud de la segunda ecuación, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\cos x \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por consiguiente, o bien

$$x+y=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \tag{1}$$

o bien

$$x+y=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi. \tag{2}$$

Transformemos la segunda ecuación del sistema inicial de la siguiente manera:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\sqrt{2}.$$

De aquí

$$\cos(x-y)=\sqrt{2}-\cos(x+y). \tag{3}$$

Si tiene lugar (1), entonces $\cos(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, y de la fórmula (3) hallamos:

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi.$$

Si tiene lugar (2), entonces $\cos(x+y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(x-y)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, lo cual, es imposible.

Así pues, para la determinación de x e y hemos obtenido el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\\ x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En concordancia con la elección del signo en la segunda ecuación del sistema (4) obtenemos dos series de soluciones:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+(k+l)\pi, \qquad y_1=(k-l)\pi$$

y

$$x_2=(k+l)\pi, \qquad y_2=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi.$$

605. Dividiendo miembro a miembro la primera ecuación por la segunda, obtendremos:

$$\cos x \cos y=\frac{3}{4\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Sumando esta ecuación a la primera y sustrayendo de (1) la primera ecuación, obtendremos un sistema equivalente al inicial:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y)&=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos(x+y)&=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\\ x+y&=\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2l\pi.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

En concordancia con la elección de los signos en la ecuación (2) obtenemos las siguientes cuatro series de soluciones:

$$\text{a)}\ x_1=(k+l)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y_1=(l-k)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8};$$

$$\text{b)}\ x_2=(k+l)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y_2=(l-k)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8};$$

$$\text{c)}\ x_3=(k+l)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y_3=(l-k)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}.$$

$$\text{d)}\ x_4=(k+l)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y_4=(l-k)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}.$$

606. Transformemos la segunda ecuación a la forma

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=a.$$

Pero, puesto que $x+y=\varphi$, entonces, $\cos(x-y)=2a-\cos\varphi$. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\varphi,\\ x-y&=\pm\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi.\end{aligned}\right\}$$

Respuesta:

$$x=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi,$$

$$y=\frac{\varphi}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)-k\pi,$$

con la particularidad de que a y φ deberán estar enlazados por la condición $|2a-\cos\varphi|\leqslant 1$.

607. Puesto que el primer miembro de la primera ecuación del sistema no supera a la unidad, el sistema puede tener solución solamente cuando $a=0$. Suponiendo que sea $a=0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x\cdot\cos 2y&=1,\\ \cos x\cdot\operatorname{sen} 2y&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

De la segunda ecuación del sistema (1) se desprende que, o bien $\cos x=0$, o bien $\operatorname{sen} 2y=0$. Si $\cos x=0$, entonces, para $x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, de la primera ecuación hallamos que $y_1=n\pi$, y para $x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, obtenemos que $y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi$. El caso $\operatorname{sen} 2y=0$ no da nuevas soluciones. Así pues, el sistema de ecuaciones es soluble solamente en el caso en que $a=0$, y tiene las dos series de soluciones siguientes:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi, \qquad y_1=n\pi;$$

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

608. Observemos que $\cos y$ no puede ser igual a cero. En efecto, si $\cos y=0$, entonces $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y

$$\cos(x-2y)=\cos(x-\pi)=-\cos x=0,$$
$$\operatorname{sen}(x-2y)=\operatorname{sen}(x-\pi)=-\operatorname{sen} x=0.$$

Pero, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ no pueden ser al mismo tiempo iguales a cero, puesto que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$. Es evidente, que $a\neq 0$ (en el caso contrario, $\cos(x-2y)=$ $=\operatorname{sen}(x-2y)=0$).

Dividiendo la segunda ecuación miembro a miembro por la primera (en virtud de la observación hecha más arriba, tal división es posible), obtendremos:

$$\operatorname{tg}(x-2y)=1, \qquad x-2y=\frac{\pi}{4}+k\pi. \tag{1}$$

Examinemos dos casos:

a) k es un número par. En este caso

$$\cos(x-2y)=\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y, \qquad \cos y=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}=\lambda;$$
$$y=\pm\arccos\lambda+2m\pi$$

Colocando este valor de y en (1), obtenemos:

$$x=\pm 2\arccos\lambda+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

b) k es un número impar. Entonces, $\cos(x-2y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y$,

$$y=\pm\arccos(-\lambda)+2m\pi.$$

De (1) hallamos.

$$x=\pm 2\arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

El sistema es soluble cuando $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$

609. Elevando las relaciones dadas al cuadrado, obtendremos:

$$\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}^2 y=a^2, \tag{1}$$
$$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=b^2. \tag{2}$$

Sumando y sustrayendo (1) y (2) miembro a miembro, hallaremos:

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2, \tag{3}$$
$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=b^2-a^2. \tag{4}$$

La ecuación (4) puede ser transformada a la forma

$$2\cos(x+y)[\cos(x-y)+1]=b^2-a^2. \tag{5}$$

De (3) y (5) hallaremos:

$$\cos(x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

610. Valiéndonos de la fórmula

$$\cos 2x+\cos 2y=2\cos(x+y)\cos(x-y),$$

escribamos la segunda ecuación del sistema en la forma

$$4\cos(x-y)\cos(x+y)=1+4\cos^2(x-y).$$

El sistema inicial puede ser sustituido por el siguiente equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} 4\cos\alpha\cos(x+y)=1+4\cos^2\alpha, \\ x-y=\alpha. \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

Comparemos ambos miembros de la ecuación (1).
Tenemos:

$$|4\cos\alpha\cdot\cos(x+y)|\leqslant 4|\cos\alpha|.$$

Por otra parte, de la desigualdad $(1\pm 2\cos\alpha)^2\geqslant 0$ se desprende que

$$4|\cos\alpha|\leqslant 1+4\cos^2\alpha,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $2|\cos\alpha|=1$. Por consiguiente, el sistema (1)—(2) puede tener solución solamente con la condición de que $|\cos\alpha|=\frac{1}{2}$.

Examinemos dos posibilidades:

a) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

De (1) hallamos que $\cos(x+y)=1$, es decir,

$$x+y=2k\pi. \tag{3}$$

Resolviendo el sistema (2)—(3), obtenemos:

$$x_1=\frac{\alpha}{2}+k\pi, \qquad y_1=k\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

b) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

Actuando análogamente, hallamos:

$$x_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\alpha}{2}, \qquad y_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

611. Este problema es análogo al anterior. Expongamos, sin embargo, una resolución un poco diferente. Empleando la fórmula (14), pág. 79, representemos la primera ecuación del sistema en la forma

$$4\cos^2(x-y)+4\cos(x+y)\cos(x-y)+1=0$$

Haciendo $\cos(x-y)=t$ y valiéndonos de que $x+y=\alpha$, obtendremos la ecuación

$$4t^2+4t\cos\alpha+1=0. \tag{1}$$

Esta ecuación tiene raices reales solamente con la condición de que $D=16(\cos^2\alpha-1)\geqslant 0$, es decir, cuando $|\cos\alpha|=1$. Examinemos dos casos posibles: $\cos\alpha=1$ y $\cos\alpha=-1$. Si $\cos\alpha=1$, entonces, de (1) se desprende que

$$t=\cos(x-y)=-\frac{1}{2}.$$

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} &x-y=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\\ &x+y=\alpha, \end{aligned}\right\}$$

del cual hallamos que

$$x_1=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi+\frac{\alpha}{2},\qquad y_1=\mp\frac{\pi}{3}-k\pi+\frac{\alpha}{2}.$$

Si $\cos\alpha=-1$, entonces, actuando análogamente, obtendremos:

$$x^2=k\pi+\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{6},\qquad y^2=\frac{\alpha}{2}-k\pi\mp\frac{\pi}{6}.$$

612. Examinemos la primera ecuación del sistema.
En virtud de la desigualdad (1), pág. 22, tenemos que

$$\left|\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right|\geqslant 2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $\operatorname{tg}x=1$ y $\operatorname{tg}x=-1$. Puesto que el segundo miembro de la primera ecuación satisface la condición

$$\left|2\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 2,$$

la primera ecuación del sistema puede satisfacerse solamente en los casos siguientes:

$$\text{a)}\ \left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}x=1,\\ &\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1; \end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad \text{b)}\ \left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}x=-1,\\ &\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=-1. \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

El sistema (1) tiene las soluciones siguientes:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi,\qquad y_1=\frac{\pi}{4}+2l\pi,\tag{3}$$

y el sistema (2), las soluciones

$$x_2=-\frac{\pi}{4}+m\pi,\qquad y_2=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi.\tag{4}$$

Es fácil comprobar que las soluciones, determinadas por las fórmulas (3), no satisfacen a la segunda ecuación del sistema inicial, y las soluciones obtenidas por las fórmulas (4), satisfacen a la segunda ecuación (y, por lo tanto, a todo el sistema) solamente en el caso en que sea m un número impar. Suponiendo en (4) que sea $m=2k+1$, escribimos las soluciones del sistema inicial en la forma

$$x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi,$$
$$y=-\frac{3}{4}\pi+2n\pi.$$

613. Observemos que $\cos x \neq 0$ y $\cos y \neq 0$, puesto que, en el caso contrario, la tercera ecuación del sistema no tiene sentido. Por esta razón, las dos primeras ecuaciones pueden ser transformadas a la forma

$$(a-1)\,\mathrm{tg}^2 x = 1-b, \tag{1}$$
$$(b-1)\,\mathrm{tg}^2 y = 1-a. \tag{2}$$

Pero, $a \neq 1$, puesto que si $a=1$, entonces, de (1) tendremos que $b=1$, lo que contradice a la condición $a \neq b$. Análogamente, si $b=1$, entonces, también $a=1$. Por consiguiente, (1) puede ser dividida miembro a miembro por (2). Dividiéndolas, obtendremos:

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Convencémosnos, además, de que $a \neq 0$. En efecto, si $a=0$, entonces, de la segunda ecuación tendremos que $\operatorname{sen} y \neq 0$, y de la tercera tendremos que $b=0$, es decir, que $a=b=0$, lo cual es imposible.

En virtud de esta observación, de la tercera ecuación podemos hallar que

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Así pues,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1-b}{1-a}$, entonces $a=b$, lo cual es imposible.

Si $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1-b}{1-a}$, entonces $a+b=2ab$.

Respuesta: $a+b=2ab$. Para $a \neq b$, esta condición es suficiente para la solubilidad del sistema.

614. La segunda relación, en virtud de la primera, se puede escribir así:

$$\frac{A \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} = \frac{B \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$$

o bien

$$\operatorname{sen} \beta\,(A \cos \beta - B \cos \alpha) = 0.$$

Esta relación puede ser cumplida cuando $\operatorname{sen} \beta = 0$ y, entonces, también $\operatorname{sen} \alpha = 0$, $\cos \beta = \pm 1$, $\cos \alpha = \pm 1$, o bien cuando $A \cos \beta - B \cos \alpha = 0$. En este último caso, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= A \operatorname{sen} \beta, \\ A \cos \beta &= B \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Elevando cada una de estas ecuaciones al cuadrado y haciendo las sustituciones por las fórmulas $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1-\cos^2 \alpha$ y $\cos^2 \beta = 1-\operatorname{sen}^2 \beta$ obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha + A^2 \operatorname{sen}^2 \beta &= 1, \\ B^2 \cos^2 \alpha + A^2 \operatorname{sen}^2 \beta &= A^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De aquí, $\cos^2 \alpha$ y $\operatorname{sen}^2 \beta$ se hallan de la única manera cuando, y sólo cuando, $A^2(1-B^2) \neq 0$; en este caso

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}, \quad \operatorname{sen} \beta = \pm \frac{1}{A} \sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}.$$

Examinemos los casos particulares, cuando $A^2(1-B^2)=0$. Si $A=0$, entonces, de (1) obtenemos que $\cos\alpha=\pm 1$ y $B=0$; en este caso $\cos\alpha=\pm 1$, $\operatorname{sen}\beta$ queda indeterminado. Si $B^2=1$, entonces, de (2) obtenemos que $A^2=1$, y las ecuaciones dadas no contienen los parámetros A y B; por eso, la tarea de expresar $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ en función de A y B pierde el sentido.

615. De la segunda ecuación deducimos que

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right),$$

y, por consiguiente, o bien

$$x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi, \tag{1}$$

o bien

$$x=2y-\frac{\pi}{2}+(2l+1)\pi. \tag{2}$$

Dirigiéndonos a la primera ecuación del sistema dado, en el caso (1) hallamos:

$$\operatorname{cotg} 2y=\operatorname{tg}^3 y \quad \text{o} \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}^3 y.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada, obtenemos que $\operatorname{tg} y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En el segundo caso, introduciendo x de la fórmula (2) en la ecuación $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y$, nos convencemos de que no existen raíces reales. Así pues,

$$\operatorname{tg} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi,$$

de donde

$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi, \quad x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

y

$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi, \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

o bien

$$x_1=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi$$

y

$$x_2=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi,$$

donde m y n son números enteros cualesquiera.

616. Transformando ambos miembros de la primera ecuación, obtendremos:

$$2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0.$$

Esta ecuación se satisface en los casos siguientes:

1º. $x = -y + 2k\pi$ $\quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$

2º. $y = 2l\pi$, x es un número cualquiera $(l = 0, \pm 1, \ldots)$.

3º. $x = 2m\pi$, y es un número cualquiera $(m = 0, \pm 1, \ldots)$.

La relación 1º es compatible con la segunda ecuación del sistema $|x| + |y| = 1$ únicamente con la condición de que $k = 0$; en efecto, de 1º se desprende la desigualdad

$$|x| + |y| \geqslant 2|k|\pi,$$

la cual, con la condición de que sea $|x| + |y| = 1$, es posible solamente en el caso en que sea $k = 0$.

Resolviendo el sistema

$$x = -y, \quad |x| + |y| = 1,$$

hallamos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Razonando análogamente en los casos 2º y 3º, hallamos dos pares más de soluciones:

$$x_3 = 1, \quad y_3 = 0; \qquad x_4 = -1, \quad y_4 = 0,$$

y también

$$x_5 = 0, \quad y_5 = 1; \qquad x_6 = 0, \quad y_6 = -1.$$

Así pues, el sistema examinado en el problema tiene las seis soluciones indicadas.

617. Elevemos ambos miembros de cada ecuación del sistema al cuadrado y, sumando las igualdades obtenidas, tendremos:

$$\operatorname{sen}^2(y - 3x) + \cos^2(y - 3x) = 4(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x),$$

es decir,

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Examinemos la identidad

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x, \tag{2}$$

demostrada en el problema 533.

Comparando (1) y (2), hallamos:

$$\operatorname{sen}^2 2x = 1, \qquad \operatorname{sen} 2x = \pm 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4}(2n + 1) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Multiplicando entre sí las ecuaciones del sistema dado, tendremos:

$$\operatorname{sen}(y - 3x)\cos(y - 3x) = 4\operatorname{sen}^3 x \cos^3 x,$$

es decir,

$$\operatorname{sen} 2(y - 3x) = \operatorname{sen}^3 2x.$$

Pero, $\operatorname{sen} 2x = \pm 1$, por eso,

$$\operatorname{sen} 2(y - 3x) = \pm 1,$$

$$y - 3x = \frac{\pi}{4}(2m + 1) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por consiguiente,

$$y = \frac{3\pi}{4}(2n + 1) + \frac{\pi}{4}(2m + 1).$$

Durante la resolución del sistema se realizó la multiplicación de ambos miembros de las ecuaciones por expresiones que contenian incógnitas, por eso es posible que se hayan obtenido soluciones ajenas. Comprobemos si todos los pares de soluciones obtenidos de x e y son soluciones. Deberá ser:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\cos^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

o, suponiendo que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}$$

y

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2},$$

y haciendo una sustitución análoga en la parte derecha, después de simplificar por el factor constante, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}+\cos\frac{\pi m}{2}=\left(\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi m}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right)^3.$$

Puesto que la base de la potencia en la parte derecha de estas nuevas igualdades puede tomar para los valores enteros de n solamente los valores 0, $+1$, -1 y estos valores no varian al ser elevados a la tercera potencia, entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}=\left(\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right)^3;$$

de aqui obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m,$$

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m.$$

Sumando y sustrayendo estas últimas relaciones, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=0,$$

$$\cos\frac{\pi}{2}n\quad\cos\frac{\pi}{2}m=0, \tag{3}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)\cos\frac{\pi}{4}(m+n)=0,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m+n)=0.$$

Puesto que

$$\cos\frac{\pi}{4}(m+n)\quad \text{y}\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m+n)$$

no se reducen a cero simultáneamente, el sistema obtenido es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)=0,$$

de donde

$$m-n=4k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Así pues, los pares de los valores de x e y obtenidos

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \qquad y=\frac{3\pi}{4}(2n+1)+\frac{\pi}{4}(2m+1)$$

dan las soluciones del sistema cuando, y sólo cuando, los números enteros n y m están enlazados por la relación (4). Por consiguiente,

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$y=\frac{\pi}{4}[3(2n+1)+2(n+4k)+1]=\pi[2(n+k)+1].$$

Pero, $n+k$ es un número entero arbitrario. Designándolo por p, tendremos definitivamente que

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \quad y=\pi(2p+1) \quad (n,\ p=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

618. Elevando ambos miembros de la primera y segunda ecuaciones al cuadrado y escribiendo la tercera ecuación en la forma inicial, obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)^2&=4a^2,\\ (\cos x+\cos y)^2&=4b^2,\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y&=c. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Buscaremos las condiciones que deberán satisfacer los números a, b, c, para que el sistema (1) tenga por lo menos una solución. Puesto que el sistema dado lo sustituimos por el sistema (1) no equivalente, hace falta demostrar que, para unas mismas condiciones impuestas a los números a, b, c, ambos sistemas tienen por lo menos una solución.

Si el sistema dado tiene solución para ciertos valores de a, b y c, entonces, es evidente, que también el sistema (1) tendrá solución para los mismos valores de a, b y c. Es justa también la afirmación inversa: si el sistema (1) tiene solución para ciertos valores de a, b y c, entonces también el sistema dado tendrá solución para los mismos valores de a, b y c.

En efecto, sean x_1 e y_1 las soluciones del sistema (1); entonces se cumple una de las cuatro posibilidades:

o bien

$$\operatorname{sen} x_1+\operatorname{sen} y_1=2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x_1+\operatorname{sen} y_1=-2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x_1+\operatorname{sen} y_1=-2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=-2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x_1+\operatorname{sen} y_1=2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=-2b$$

Si tiene lugar el primer caso, entonces x_1 e y_1 son las soluciones del sistema dado; en el segundo caso, el sistema dado tiene, por ejemplo, la solución $-x_1$, $-y_1$; en el tercer caso, la solución $\pi+x_1$, $\pi+y_1$; en el cuarto, la solución

$\pi-x_1$, $\pi-y_1$. Por consiguiente, el sistema dado tiene por lo menos una solución cuando, y sólo cuando, tiene por lo menos una solución el sistema (1).

¿Cuándo tiene solución el sistema (1)? Sumando y sustrayendo la primera y la segunda ecuaciones del sistema (1), hallaremos:

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=4(b^2-a^2),$$

o bien

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)=2(b^2-a^2),$$

de donde

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$(a^2+b^2)\cos(x+y)=b^2-a^2.$$

Hemos obtenido el sistema

$$\left.\begin{aligned}\cos(x-y)&=2(a^2+b^2)-1,\\(a^2+b^2)\cos(x+y)&=b^2-a^2,\\\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y&=c,\end{aligned}\right\}$$

equivalente al sistema (1).

Si $a^2+b^2=0$, la segunda ecuación se satisface cualesquiera que sean los valores de x e y. De la primera ecuación obtenemos:

$$x-y=\pi+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

la tercera ecuación nos da:

$$\operatorname{tg}(y+\pi+2k\pi)\operatorname{tg}y=c$$

o bien

$$\operatorname{tg}^2 y=c.$$

Esta última ecuación tiene solución para cualquier valor de $c\geqslant 0$. Si $a^2+b^2\neq 0$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x-y)&=2(a^2+b^2)-1,\\\cos(x+y)&=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Este sistema tiene solución cuando, y sólo cuando,

$$|2(a^2+b^2)-1|\leqslant 1,\tag{3}$$
$$\left|\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right|\leqslant 1.\tag{4}$$

La desigualdad (4), con la condición de que

$$a^2+b^2\neq 0,$$

evidentemente, es justa, y la desigualdad (3) es equivalente a la siguiente:

$$0<a^2+b^2\leqslant 1.$$

Representemos el primer miembro de la tercera ecuación del sistema (1) en la forma siguiente:

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}=\frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]}\tag{5}$$

y sustituyamos en (5) $\cos(x+y)$ y $\cos(x-y)$ por sus valores de (2). Como resultado obtendremos que la solución del sistema (2) satisfará a la tercera ecuación del sistema inicial, si

$$c=\frac{2(a^2+b^2)-1-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1}=\frac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}.$$

Hemos llegado al siguiente resultado: el sistema dado tiene por lo menos una solución en dos casos:

1) $0<a^2+b^2\leqslant 1$ y $c=\dfrac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}$;

2) $a=b=0$ y c es cualquier número no negativo.

3. Funciones trigonométricas inversas

619. De la definición de los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se desprende que

$$\arccos(\cos x)=x,\quad \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Con el fin de utilizar esta fórmula, sustituyamos $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ con ayuda de las fórmulas de reducción al coseno del ángulo incluido entre 0 y π. Escribamos las igualdades siguientes:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}$$

En resumen obtenemos:

$$\arccos\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]=\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\frac{9\pi}{14}$$

620. Por analogía con la resolución del problema anterior tenemos:

$$\cos\frac{33}{5}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\frac{3}{5}\pi=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{5}\pi\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Por consiguiente,

$$\arcsen\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)=\arcsen\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]=-\frac{\pi}{10}$$

621. Supongamos que sea $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha_1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha_2$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\alpha_3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\alpha_4$. Es evidente, que $0<\alpha_i<\frac{\pi}{4}$, $i=1, 2, 3, 4$. Por eso,

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<\pi.$$

Para la demostración de la identidad es suficiente establecer que

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=1.$$

Puesto que

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{7},\qquad \operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{3}{11},$$

entonces,

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}=1$$

622. Haciendo $\arcsen x=\alpha$, $\arccos x=\beta$, tendremos:

$$x=\operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad x=\cos\beta=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Según la definición de los valores principales tenemos que

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi.$$

De la última desigualdad se deriva la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, puesto que los ángulos α y $\frac{\pi}{2}-\beta$ están incluidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y los senos de estos ángulos son iguales entre sí. La fórmula queda demostrada.

623. Aprovechando que $\arcsen x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ (véase la resolución del problema 622), transformemos la ecuación a la forma

$$12\pi t^2-6\pi^2 t+(1-8\alpha)\pi^3=0, \tag{1}$$

donde $t=\arcsen x$. Siendo $\alpha<\frac{1}{32}$, el discriminante de esta ecuación será

$$D=36\pi^4-48\pi^4(1-8\alpha)<0.$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación (1) son irreales y por eso, para $\alpha<\frac{1}{32}$, la ecuación inicial no tiene soluciones.

624. Hagamos $\arccos x=\alpha$, $\arcsen\sqrt{1-x^2}=\beta$.

a) Si $0\leqslant x\leqslant 1$, entonces $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ y $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ (puesto que $0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$). Queda solamente convencerse de que $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$. Pero, en virtud de la desigualdad $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{1-x^2}$.

Por otra parte, para todos los valores de y ($|y|\leqslant 1$) tenemos que $\operatorname{sen}\arcsen y=y$, en particular, $\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\arcsen\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$. Por consiguiente, para $0\leqslant x\leqslant 1$, tiene lugar la fórmula

$$\arccos x=\arcsen\sqrt{1-x^2}.$$

b) Si $-1\leqslant x\leqslant 0$, entonces $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-\beta\leqslant\pi$. Puesto que, además, $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-x^2}$ y $\operatorname{sen}(\pi-\beta)=\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-x^2}$, entonces $\alpha=\pi-\beta$, es decir, para $-1\leqslant x\leqslant 0$ tiene lugar la fórmula

$$\arccos x=\pi-\arcsen\sqrt{1-x^2}.$$

625. Demostremos que $\arcsen(-x)=-\arcsen x$. Hagamos $\arcsen(-x)=\alpha$; entonces $-x=\operatorname{sen}\alpha$ y, según la definición de los valores principales,

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Puesto que $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha=x$ y, puesto que de la desigualdad (1) se deriva la desigualdad $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, entonces $-\alpha=\arcsen x$ de donde $\alpha=-\arcsen x$, o sea, $\arcsen(-x)=-\arcsen x$.

Análogamente se demuestra la fórmula $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

626. De la definición de los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se desprende que $\arcsen(\sen\alpha)=\alpha$, si $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Si $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, entonces $-\frac{\pi}{2}\leqslant x-2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$ Pero, entonces $\arcsen(\sen x)=\arcsen[\sen(x-2k\pi)]=x-2k\pi$.

627. Según la condición del problema

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+x}{1-x}. \qquad (1)$$

Utilizando la fórmula

$$\sen\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

en virtud de (1), obtendremos:

$$\sen\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

de donde

$$y=\arcsen(\sen\alpha)=\arcsen\frac{1-x^3}{1+x^2}=\beta. \qquad (2)$$

Puesto que $0<x<1$, entonces

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}<\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

De aquí se desprende que

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi\leqslant 0$$

y

$$\arcsen[\sen(\alpha-\pi)]=\arcsen(-\sen\alpha)=-\arcsen(\sen\alpha)=-y.$$

Pero el ángulo $\alpha-\pi$ se encuentra en los límites del valor principal $\operatorname{Arcsen} x$. Por consiguiente,

$$y=\arcsen(\sen\alpha)=\pi-\alpha. \qquad (3)$$

De (2) y (3) obtenemos que $\alpha+\beta=\pi$.

628. En las fórmulas $\arcsen\cos\arcsen x$ y $\arccos\sen\arccos x$ se toman los valores principales de las funciones trigonométricas inversas. Examinemos $\cos\arcsen x$. Esto es el coseno de un arco, el seno del cual es igual a x. Por consiguiente,

$$\cos\arcsen x=+\sqrt{1-x^2}, \quad \text{donde } -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Aquí, claro está, es esencial que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsen x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Análogamente

$$\sen\arccos x=+\sqrt{1-x^2}, \quad \text{donde } -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Designemos $y=+\sqrt{1-x^2}$; entonces $0\leqslant y\leqslant 1$.

Así pues, hay que hallar la relación entre $\arcsen y$ y $\arccos y$ siendo $0\leqslant y\leqslant 1$. Estos dos ángulos complementan uno al otro hasta $\frac{\pi}{2}$ (véase la resolución del problema 622). Así pues,

$$\arcsen\cos\arcsen x+\arccos\sen\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

4. Desigualdades trigonométricas

629. La desigualdad dada es equivalente a la siguiente

$$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1>0. \qquad (1)$$

Descomponiendo el trinomio cuadrado, que figura en la parte izquierda de (1), en factores, obtendremos.

$$\left(\operatorname{sen} x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\operatorname{sen} x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0. \qquad (2)$$

Pero,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$$

y por eso,

$$\operatorname{sen} x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0.$$

Por consiguiente, la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente:

$$\operatorname{sen} x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

y tiene la solución

$$2k\pi+\varphi<x<\pi-\varphi+2k\pi,$$

donde

$$\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

630. Cuando $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, la expresión que se examina no tiene sentido. Para los demás valores de x multipliquemos ambas partes de la desigualdad por $\cos^2 x$. Obtendremos la desigualdad equivalente

$$(\operatorname{sen} 2x)^2+\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x-2>0.$$

Resolviendo la desigualdad cuadrada obtenida hallaremos que o bien

$$\operatorname{sen} 2x<\frac{-3-\sqrt{41}}{4},$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2x>\frac{\sqrt{41}-3}{4}.$$

La primera de estas desigualdades no puede ser cumplida. Por consiguiente,

$$k\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{41}-3}{4}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{41}-3}{4}+k\pi.$$

631. Transformando el producto de los senos en una suma, sustituyamos la desigualdad dada por la siguiente equivalente:

$$\cos 3x>\cos 7x \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x>0.$$

Pero, cuando $0<x<\frac{\pi}{2}$ tenemos que $\operatorname{sen} 2x>0$ y, por consiguiente, la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente $\operatorname{sen} 5x>0$.

Respuesta: $0<x<\frac{\pi}{5}$ y $\frac{2}{5}\pi<x<\frac{\pi}{2}$.

632. La expresión que figura en el denominador de la parte izquierda de la desigualdad es positiva, puesto que

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

Por esta razón, la desigualdad es equivalente a la siguiente,

$$\operatorname{sen}^2 x>\frac{1}{4} \quad \text{o bien} \quad |\operatorname{sen} x|>\frac{1}{2}.$$

Respuesta: $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi.$

633. Escribamos la desigualdad en la forma
$(\cos x-\operatorname{sen} x)[1-(\cos x+\operatorname{sen} x)]=$

$$=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)(\cos x-\operatorname{sen} x)>0. \qquad (1)$$

Pero $\operatorname{sen}\frac{x}{2}>0$, puesto que $0<x<2\pi$. Examinemos dos casos posibles, en los cuales se cumple la desigualdad (1).

Caso 1.

$$\left.\begin{aligned}&\cos x-\operatorname{sen} x>0,\\&\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}>0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Según la condición del problema, $0<x<2\pi$. Teniendo en cuenta este hecho, de (2) hallamos que la primera desigualdad se cumple cuando $0<x<\frac{\pi}{4}$ o bien $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$, y la segunda, cuando $\frac{\pi}{2}<x<2\pi$. Por consiguiente, en este caso, $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$.

Caso 2.

$$\left.\begin{aligned}&\cos x-\operatorname{sen} x<0,\\&\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}<0\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

El sistema (3), teniendo en cuenta que $0<x<2\pi$, se cumple cuando $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

Respuesta:

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{5}{4}\pi<x<2\pi.$$

634. Hagamos $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Entonces, la desigualdad dada toma la forma

$$t>\frac{2t-2+2t^2}{2t+2-2t^2}$$

o bien

$$\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2-t-1}>0. \qquad (1)$$

Puesto que, $t^2+t+1>0$ para todos los valores reales de t, la desigualdad (1) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{t-1}{t^2-t-1} > 0. \tag{2}$$

El trinomio t^2-t-1 tiene las raíces $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Resolviendo (2), hallaremos que, o bien

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

o bien

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1.$$

Respuesta:

$$\text{a) } 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi + 2k\pi.$$

$$\text{b) } 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

635 De las fórmulas para $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$ (véase la pág. 79) hallamos:

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \quad \operatorname{sen}^3 x = \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}.$$

Valiéndonos de estas fórmulas, escribamos la desigualdad dada en la forma

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)\operatorname{sen} 3x > \frac{5}{2}$$

o bien

$$\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x + 3(\cos 3x \cos x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) > \frac{5}{2},$$

o bien

$$\cos 4x > \frac{1}{2},$$

de donde

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

o bien

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

636. La desigualdad a demostrar se puede escribir en la forma

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} > \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{1}$$

Pero, $\operatorname{sen}\varphi > 0$ cuando $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, por eso, después de multiplicar ambas partes de la desigualdad (1) por $\operatorname{sen}\varphi$, obtendremos la desigualdad equivalente

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} > \cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\varphi$$

o bien $1 > \operatorname{sen} \varphi$. La última desigualdad se cumple cuando $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, por consiguiente, es justa también la desigualdad inicial.

637. Haciendo $\operatorname{tg} x = t$, obtendremos:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

La parte izquierda pierde el sentido para aquellos valores de x con los cuales $t^2 = 1$, $t^2 = \frac{1}{3}$. Para los demás valores de x, la parte izquierda de la desigualdad es igual a $t^4 + 2t^2 + 1$ y, por consiguiente, adquiere valores positivos.

638. En virtud de que

$$\operatorname{cotg}^2 x - 1 = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad 3 \operatorname{cotg}^2 x - 1 = \frac{3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

$$\operatorname{cotg} 3x \cdot \operatorname{tg} 2x - 1 = \frac{\cos 3x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x \cos 2x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x \cos 2x}.$$

La parte izquierda de la desigualdad puede ser escrita en la forma

$$-\frac{\operatorname{sen} x\,(3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} 3x}$$

Pero,

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(x + 2x) = \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x\,(3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x),$$

por eso, la desigualdad dada se reduce a la desigualdad evidente

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x} \leqslant -1.$$

639. Utilizando la fórmula

$$\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi}$$

y la condición

$$\operatorname{tg} \theta = n \operatorname{tg} \varphi,$$

obtendremos:

$$\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi) = \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + n \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{cotg} \varphi + n \operatorname{tg} \varphi)^2}.$$

Hace falta demostrar que

$$(\operatorname{cotg} \varphi + n \operatorname{tg} \varphi)^2 \geqslant 4n$$

o bien

$$(1 + n \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 \geqslant 4n \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Obtenemos, pues, la desigualdad evidente

$$(1 - n \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 \geqslant 0.$$

640. La desigualdad dada se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{sen} x} - \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3 - \operatorname{sen} x} \geqslant 0$$

y, multiplicándola por $2(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x) > 0$, puede ser sustituida por la siguiente equivalente:

$$\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 4 \geqslant 0$$

o bien

$$(4-\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x) \geqslant 0, \tag{1}$$

De (1) desprendemos que la última desigualdad, y junto con ésta también la inicial, se cumple para todos los valores de x, con la particularidad de que cuando $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, tiene lugar el signo de igualdad.

641. Establezcamos primeramente que

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|.$$

Examinemos un círculo trigonométrico de radio 1 y supongamos que x denota el valor en radianes de cierto ángulo AOM positivo o negativo (fig. 249). Para cualquier posición del punto M

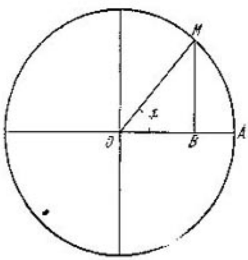

FIG. 249

$$\overset{\frown}{AM} = |x|\cdot OA = |x|,$$
$$|BM| = |\operatorname{sen} x|.$$

Puesto que $|BM| \leqslant \overset{\frown}{AM}$, entonces $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ (la igualdad tiene lugar solamente cuando $x=0$). En virtud de esto deducimos que $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, es decir, si $0 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen}\cos\varphi < \cos\varphi$. Pero, $0 \leqslant \operatorname{sen}\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ y por eso $\cos\varphi \leqslant \cos\operatorname{sen}\varphi$. Definitivamente tenemos que $\cos\operatorname{sen}\varphi \geqslant \cos\varphi > \operatorname{sen}\cos\varphi$.

La desigualdad queda demostrada.

642. Utilicemos el método de inducción completa. Sea $n=2$, entonces $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Por consiguiente,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 2\operatorname{tg}\alpha,$$

puesto que $0 < 1-\operatorname{tg}^2\alpha < 1$. Supongamos que sea

$$\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

con la condición de que

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}. \tag{2}$$

Demostremos que $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, si $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$.

Empleemos la fórmula

$$\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} n\alpha}. \tag{3}$$

Puesto que la desigualdad (1) se cumple al cumplirse la condición (2), entonces, se cumplirá, además, cuando $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$. Pero,

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \tag{4}$$

y, puesto que $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$, entonces

$$0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1. \tag{5}$$

De (4) y (5) obtendremos:

$$0 < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} n\alpha < 1. \tag{6}$$

De (6) y (3) se desprende que $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, lo que era necesario demostrar.

643. Puesto que a mayor ángulo del primer cuadrante le corresponde mayor valor de la tangente, entonces,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n \tag{1}$$

para $i=1, 2, \ldots, n$. Además, $\cos\alpha_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Por esta razón, la desigualdad (1) se puede escribir en la forma

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_i < \operatorname{sen}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_i. \tag{2}$$

Demos en la desigualdad (2) a i los valores $1, 2, \ldots, n$ y sumemos todas las desigualdades obtenidas. Hallaremos:

$$\operatorname{tg}\alpha_1(\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n) < \operatorname{sen}\alpha_1 + \ldots + \operatorname{sen}\alpha_n < \\ < \operatorname{tg}\alpha_n(\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n). \tag{3}$$

Dividiendo todas las partes de la desigualdad (3) por $\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n$ (lo cual es posible, puesto que $\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n > 0$), tendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 + \ldots + \operatorname{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n$$

644. Designemos la parte izquierda de la desigualdad que se examina por t. Entonces

$$t = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2},$$

puesto que

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}.$$

Haciendo

$$\cos\frac{A+B}{2} = x,$$

después de las transformaciones evidentes, obtendremos:

$$t = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right) + \\ + \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} = \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$t \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

645. Transformemos la parte izquierda de la desigualdad dada de la manera siguiente:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x(\cos x-\operatorname{sen} x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{tg} x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg} x)}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg} x)}.$$

Para simplificar la escritura, hagamos $\operatorname{tg} x=t$. Puesto que $0<x<\frac{\pi}{4}$, entonces

$$0<t<1. \tag{1}$$

De este modo, el problema se reduce a la demostración de la desigualdad

$$\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>8$$

con la condición de que $0<t<1$. Pero, en virtud de la desigualdad (1), pág. 22, tenemos que

$$\frac{1+t^2}{t}>2.$$

Además,

$$t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>2\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=8,$$

lo que era necesario demostrar.

5. Problemas diferentes

646. Hagamos $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\beta$ y examinemos $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$. Valiéndonos de la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos, obtenemos:

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{1}$$

Pero, dado que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, entonces $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}$. Sustituyendo $\operatorname{tg} 2\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ en la fórmula (1), hallamos que

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=0.$$

Entonces

$$\operatorname{sen}(2\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)=0.$$

647. Demostremos que $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=1$. Para hallar $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$ empleemos la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} 2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\beta}. \tag{1}$$

Calculemos previamente el valor de $\operatorname{tg} 2\beta$ por la fórmula

$$\operatorname{tg} 2\beta=\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\cos 2\beta}.$$

Hace falta hallar $\cos\beta$ y $\cos 2\beta$. Pero,

$$\cos\beta = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(puesto que β es un ángulo del primer cuadrante) y

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = \frac{4}{5}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{tg} 2\beta = 3/4$. Colocando el valor hallado de $\operatorname{tg} 2\beta$ en (1), obtendremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1.$$

Demostremos, ahora, que $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

Puesto que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ entonces

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3}$$

y, además, según la condición del problema, α y β son ángulos del primer cuadrante, por lo tanto, $0 < \alpha < \pi/4$ y $0 < \beta < \pi/4$. De aquí hallamos que $0 < \alpha + 2\beta < 3/4\pi$. Pero, el único ángulo comprendido entre 0 y $3/4\pi$, cuya tangente es igual a 1 es el ángulo $\pi/4$. Así pues, $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

648. Es necesario que $\cos x \neq 0$, $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\operatorname{sen} x \neq -1$, de donde $x \neq k\pi/2$ (k es un número entero). Para todos los valores de x, excepto $x = k\pi/2$, y tiene sentido y es igual a

$$y = \frac{\operatorname{sen} x\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{sen} x)}. \tag{1}$$

De (1) se desprende que $y > 0$, puesto que, siendo $x \neq k\pi/2$,

$$\cos x < 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x < 1.$$

649. Transformando el producto $\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen} 3\alpha$ en una suma, por la fórmula (13), pág. 79, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen} 3\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\,(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{4}{5}.$$

650. Puesto que $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x\cos 2x + \cos 3x \operatorname{sen} 2x$, con ayuda de las fórmulas (5)—(8), pág. 79, después de simples cálculos, hallaremos que

$$\operatorname{sen} 5x = 5\operatorname{sen} x - 20\operatorname{sen}^3 x + 16\operatorname{sen}^5 x. \tag{1}$$

Suponiendo en la fórmula (1) $x = 36°$, obtendremos la ecuación $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0$ para la determinación de $\operatorname{sen} 36°$. Esta ecuación tiene las siguientes raíces:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad t_3 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

$$t_4 = +\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{y} \quad t_5 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

De estas raíces son positivas las raíces t_2 y t_4. Pero, sen 36° $\neq t_2$, puesto que $\frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $t_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Así pues,

$$\operatorname{sen} 36° = t_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

651. Utilizando la identidad demostrada en el problema 533, obtendremos:

$$\varphi(x) = \frac{1+3\cos^2 2x}{4},$$

de donde se desprende que el valor máximo de $\varphi(x)$ es igual a 1, y el mínimo, a 1/4.

652. Como resultado de simples transformaciones obtenemos que

$$y = 1 - \cos 2x + 2(1+\cos 2x) + 3\operatorname{sen} 2x - 3 + 3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x.$$

Introduciendo el ángulo auxiliar $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, tendremos que

$$y = 3 + \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x\right) = 3 + \sqrt{10}\operatorname{sen}(2x+\varphi).$$

Por consiguiente, el valor máximo de y es $3+\sqrt{10}$, y el mínimo, es igual a $3-\sqrt{10}$.

653. Si n es un número entero que satisface a la condición del problema, entonces, para todos los valores de x, tenemos:

$$\cos n(x+3\pi)\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}x. \qquad (1)$$

Suponiendo, en particular, que $x=0$, de (1) desprendemos que n deberá satisfacer a la ecuación $\operatorname{sen}\frac{15\pi}{n}=0$. A esta ecuación la satisfacen solamente aquellos números enteros que son divisores del número 15.

$$n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15. \qquad (2)$$

Por medio de la comprobación directa nos convencemos de que, para cada uno de estos valores, la función $\cos nx\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}x$ tiene el período 3π. Con la fórmula (2) se agotan todos los valores buscados de n.

654. Puesto que la suma que se examina, siendo $x=x_1$, es igual a cero, entonces

$$a_1\cos(\alpha_1+x_1)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x_1) = (a_1\cos\alpha_1+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1 - (a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n)\operatorname{sen} x_1 = 0. \qquad (1)$$

Pero, según la condición del problema,

$$a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n = 0. \qquad (2)$$

Además, $\operatorname{sen} x_1 \neq 0$, puesto que $x_1 \neq k\pi$. De (1) y (2) obtenemos que

$$a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n = 0. \qquad (3)$$

Sea, ahora, x un número cualquiera. Entonces,

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x) =$$
$$= (a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x - (a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n)\operatorname{sen} x = 0,$$

puesto que, en virtud de (2) y (3) las sumas que figuran entre paréntesis son iguales a cero

655. Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que existe $T \neq 0$ tal, que para todos los valores de $x \geqslant 0$ será

$$\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x} \tag{1}$$

(la limitación $x \geqslant 0$ es necesaria por el hecho de que siendo $x < 0$, el radical $\sqrt{x}$ será imaginario. Hagamos primeramente en la fórmula (1) $x=0$; entonces

$$\cos\sqrt{T} = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

y, por lo tanto,

$$\sqrt{T} = 2k\pi. \tag{3}$$

Luego, coloquemos en (1) el valor $x=T$. Entonces, evidentemente, tendremos que, de acuerdo con (1) y (2), $\cos\sqrt{2T} = \cos\sqrt{T} = 1$, de donde

$$\sqrt{2T} = 2l\pi.$$

Puesto que por suposición $T \neq 0$, dividiendo (4) por (3), obtendremos que $\sqrt{2} = \frac{l}{k}$, donde l y k son números enteros. Esto último, como es sabido, es imposible.

656. Primera resolución. Examinemos la suma

$$S = (\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) + \ldots + (\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$$

y, empleando la fórmula de Moivre, $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$, calculemos la suma S como la suma de una progresión geométrica. Obtendremos:

$$S = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{n+1} - (\cos x + i \operatorname{sen} x)}{\cos x + i \operatorname{sen} x - 1}.$$

La suma $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx$ es igual a la parte imaginaria de S.

Segunda resolución. Multiplicando la parte izquierda por $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ y empleando la fórmula (13), pág. 79, obtendremos:

$$\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x\right) + \left(\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x =$$
$$= 2\operatorname{sen}\frac{nx}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x,$$

de donde, precisamente, se deduce la fórmula necesaria.

657 Designemos la suma buscada por A y agreguémosle la segunda sum

$$B = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}}{2^n},$$

multiplicándola previamente por i. Obtendremos:

$$A + Bi = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right).$$

Empleando la fórmula de Moivre, hallamos:

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}.$$

En la última expresión se ha usado la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica. La suma buscada A puede ser hallada como la parte real de la expresión obtenida. Observando que

$$\cos\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

hallamos sucesivamente que

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{i}{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{(1+i)\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)-i\right]}=$$

$$=\frac{(1+i)(2\sqrt{2}-1+i)}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)^2+1\right]}\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{\left[(2\sqrt{2}-2)+2i\sqrt{2}\right]\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n(10-4\sqrt{2})}.$$

Separando la parte real, obtenemos:

$$A=\frac{(\sqrt{2}-1)\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}}{2^n(5-2\sqrt{2})}.$$

658. La afirmación quedará demostrada si establecemos que $A=B=0$. Sea $A^2+B^2\neq 0$, es decir, por lo menos uno de los números A, B difiere de cero. Entonces

$$f(x)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen} x\right)\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(x+\varphi),$$

donde $\operatorname{sen}\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Sea, ahora, x_1 y x_2 los dos valores del argumento indicados en el problema; entonces, $f(x_1)=f(x_2)=0$, y puesto que $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$, $\operatorname{sen}(x_1+\varphi)=\operatorname{sen}(x_2+\varphi)=0$. De aquí $x_1+\varphi=m\pi$, $x_2+\varphi=n\pi$ y, por consiguiente, $x_1-x_2=k\pi$ para cierto valor entero de k. Esta igualdad conduce a una contradicción, puesto que según la condición $x_1-x_2\neq k\pi$.

Por consiguiente, $A^2+B^2=0$, de donde $A=B=0$.